

## Reliability interna di serie temporali GNSS in presenza di rumore colorato

Nicola Perfetti (\*), Nicola Crocetto (\*\*), Alberto Pellegrinelli (\*\*\*), Paolo Russo (\*\*\*)

(\*) Geotop srl, Via Breccie Bianche 152 – 60131 Ancona Italy, Tel. +39 071 21325245, e-mail n.perfetti@geotop.it

(\*\*) Fac. di Ingegneria, II Università di Napoli, via Roma 29, I-81031 Aversa (Ce)

(\*\*\*) Engineering Department in Ferrara (ENDIF), Università degli Studi di Ferrara, via Saragat, 1 – 44100 Ferrara

### Riassunto

In questo lavoro, tramite l'analisi della *reliability* interna, si mostrano i più piccoli valori delle discontinuità e dei cambi di velocità rilevabili con test statistici in serie di coordinate di stazioni GNSS permanenti, nel caso in cui i dati di partenza siano affetti da vari tipi di rumore colorato. Si mostra, inoltre, come i valori di *random walk noise*, *flicker noise* e *first order autoregressive noise*, pubblicati in bibliografia, possano ostacolare la corretta stima dei valori di discontinuità o cambi di velocità, qualora questi siano realmente presenti.

### Abstract

*In this paper we investigated on the internal reliability of the time series, estimating the values of the minimal discontinuity and the minimal rate changes detectable using tests statistic. We consider GNSS permanent stations coordinates time series affected by different types of coloured noise. The results show that the values of the random walk, flicker noise and first order autoregressive noise, provided in the cited references, make difficult to localize real discontinuity and/or rate changes.*

### Introduzione

E' un fatto consolidato che oggi i moderni strumenti di misura impiegati in geodesia e topografia sono in grado di fornire osservazioni ad una (pressoché) qualsivoglia frequenza. Il risultato della misura, quindi, non è più una singola determinazione (o un numero limitato di determinazioni) di una grandezza (molto spesso geometrica), ma un insieme costituito da un numero elevato di osservazioni, numero che facilmente arriva ad ordini di grandezza di  $10^3$ - $10^4$  o anche più. Le stazioni GNSS permanenti ne sono un esempio, essendo in grado di fornire osservazioni molto numerose (Kenyeres and Bruyninx 2004). Attualmente disponiamo di serie temporali di soluzioni giornaliere lunghe 10-15 anni; queste permettono di evidenziare fenomeni ed eventi di svariata natura: geofisica, geologica, meteorologica, strumentale, ecc., secondo gli scopi per cui le stazioni sono installate, ma anche umana (errori nella manutenzione degli strumenti). Parallelamente, proprio in virtù della numerosità di questi dati, si possono rilevare fenomeni di rumore più o meno complessi (Mao et al. 1999). Alcuni di essi, nonostante la natura stocastica, si manifestano, a prima vista, similmente a fenomeni deterministici e senza l'adozione di opportune tecniche di analisi, possono essere scambiati per tali (Williams 2003). Ma è anche vero il vice-versa: discontinuità piccole e numerose e cambi di velocità delle serie di coordinate, possono essere confusi ad esempio con un *random walk noise* (Williams 2003). I tipi di rumore che comunemente affliggono i dati delle stazioni GNSS permanenti (riportati in bibliografia) possono essere *white noise (WN)*, *random walk noise (RW)*, *flicker noise (FN)* e *auto-regressive noise (AR(1))*, Amiri-Simkooei 2007, Amiri-Simkooei et al. 2007), e la loro contemporanea presenza influenza la localizzazione e la stima di discontinuità e cambi di velocità. Di seguito si descriveranno i modelli dei processi di rumore menzionati e, sulla base dei valori riportati in bibliografia, si cercherà di fornire una stima delle entità delle discontinui-

tà e dei cambi di velocità rilevabili con test statistici (di prefissato livello di significatività e potenza).

**Rumore colorato**

Le misure geodetiche, come tutti i tipi di osservazioni, sono affette da errori; i processi che producono queste “imprecisioni” sono di svariata natura e per di più possono mutuamente influenzarsi. Un modo efficace per classificarli è quello di ricorrere alla forma del diagramma della densità spettrale “Power Spectral Density” (PSD). Come evidenziato da Agnew (1992), per i processi di rumore la PSD ( $P_x$ ) è ben descritta dalla formula:

$$P_x(f) = P_0 \left( \frac{f}{f_0} \right)^k \quad [1]$$

dove  $f$  è la frequenza (spaziale o temporale),  $k$  è l’indice spettrale e  $f_0$  e  $P_0$  sono delle costanti per la normalizzazione.  $k \in [-3;1]$  e i processi ad esso corrispondenti si suddividono in:

noise	k	noise
	1	
white noise	0	fractional white noise
flicker noise	-1	
random walk	-2	fractional brownian motion
	-3	

**White Noise (rumore bianco)**

Nei classici problemi di compensazione (ad esempio nel calcolo delle coordinate dei vertici di una rete topografica) i residui ( $v_i$ , che rappresentano gli errori che affliggono le singole osservazioni) sono spesso trattati come errori accidentali. Sono quindi considerati delle estrazioni di valori di una variabile aleatoria, detta normale, da una popolazione caratterizzata da soli due parametri statistici, la media (nulla) e la varianza ( $\sigma^2$ ):

$$v_i \sim N(0, \sigma^2) \quad [2]$$

Ciò significa che ripetendo ininterrottamente la misura della grandezza a cui corrisponde  $v_i$ , i valori dei residui risulteranno distribuiti in una fascia che va da  $-3\sigma$  a  $+3\sigma$ , centrata attorno allo zero, con una probabilità del 99%. Ogni estrazione produce un valore del residuo,  $v_i$ , che è indipendente dalle precedenti e non influenza quelle future. Questo tipo di processo corrispondente al rumore bianco e presenta la caratteristica della non correlazione degli eventi (estrazioni): detta  $v_k$  la  $k$ -esima estrazione, caratterizzata da  $E(v_k) = 0$ ,  $D(v_k) = \sigma^2$ , la successiva  $v_{k+1}$  è caratterizzata dagli stessi valori,  $E(v_{k+1}) = 0$ ,  $D(v_{k+1}) = \sigma^2$ . Il valore  $v_k$  non influenza  $E(v_{k+1})$  nè  $D(v_{k+1})$ , rispettivamente pari a  $E(v_{k+1}) = 0$  e  $D(v_{k+1}) = \sigma^2$ . Ciò vale anche per  $v_{k+r} \forall r$ , rispetto a  $v_k$ . In termini di PSD, la caratteristica del white noise è quella di avere la stessa densità spettrale a tutte le frequenze. Gli “errori accidentali” hanno lo stesso comportamento stocastico a tutte le frequenze, figura 1.

**First Order Autoregressive Noise**

Quando l’errore sull’estrazione  $k$ -esima dipende, in qualche modo, da quelli precedenti si hanno processi di rumore autoregressivo. In particolare quando dipende da quello al passo  $k-1$  si ha il *First Order Autoregressive Noise*. Detto  $\varepsilon_k$  il rumore che affligge la  $k$ -esima osservazione, esso è del tipo AR(1) se si può esprimere come (Witkovsky’, 1996):

$$\begin{aligned} & \dots + v_1 / \sqrt{1 - I^2} \\ & \dots \\ & \dots + I / \sqrt{1 - I^2} + v_k \end{aligned} \quad [3]$$

per  $k=2, \dots, n$ , con  $|I| < 1$  e dove  $v_k$  è rumore bianco. È facile vedere che  $E\{v_k} = 0$ , mentre la sua dispersione è data dalla matrice di varianza covarianza (Witkovsky', 1996):

$$Q_{\alpha} = \frac{2^2}{1 - I^2} \begin{bmatrix} 1 & I & I^2 & \dots & I^{n(1)} \\ I & 1 & I & \dots & I^{n(2)} \\ I^2 & I & 1 & \dots & I^{n(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{n(1)} & I^{n(2)} & I^{n(3)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [4]$$

$2^2$  è la varianza del *white noise*. In Amiri-Simkooei 2007, Amiri-Simkooei et al. 2007, i coefficienti della matrice sono scritti facendo uso dell'esponenziale e del fattore di scale temporale  $\tau$  in luogo di 1, con  $\tau = (\ln \# I) / \ln 2$ . Per  $\tau=1$   $I$  rappresenta un *random walk*. Il diagramma della PSD dell'AR(1) è una via di mezzo tra quello del *white noise*, alle basse frequenze, e quello del *flicker noise* alle alte frequenze (Denny et al, 2004), figura 1. La figura 2 (sinistra) mostra tre tipologie di AR(1) al variare di  $\tau$  (scale temporali  $\tau = 0.22, 0.69$  e  $1.61$  rispettivamente  $\tau = 0.8, 0.5$  e  $0.2$ ).

**Flicker Noise**

Una delle proprietà che caratterizza il *flicker noise* è che la PSD è proporzionale a  $1/f$ , in scala logaritmica il diagramma ha una distribuzione approssimabile con una retta di pendenza -1 (figura 1). Tale caratteristica, apparentemente semplice, comporta però delle difficoltà, prima fra tutte quella che per questo tipo di rumore, ad oggi, non si ha una espressione matematica definita. Attualmente ne esistono diverse approssimazioni: *shot noise process* (Lowen & Teich 2005), *clustering Poisson point process* (Gruneis e Musha 1986, Gruneis 2001), *recurrence models* (Kaulakys and Meškauskas 1998, Kaulakys, et al. 2005), *stochastic differential equation model* (Kaulakys et al. 2006), *reversible Markov chain models* (Erland & Greenwood 2007). Questo tipo di rumore è presente in molti fenomeni naturali: fisica, geofisica, elettronica, medicina (pulsazioni del cuore, encefalogrammi), musica. Il ticchettio delle dita eseguito per ottenere un riferimento temporale (mimando un metronomo) è caratterizzato da *flicker noise*. Il valore atteso del rumore è  $E\{v_k} = 0$  la sua dispersione è data da (Zhang et al, 1997):

$$Q_{\alpha} = \begin{cases} \frac{9}{8} & \text{if } \alpha=0 \\ \frac{9}{8} \left( \frac{\log 3 / \log 2 + 2}{24} \right) & \text{if } \alpha \neq 0 \end{cases} \quad [5]$$

**Random Walk**

Il *random walk* è l'integrale del *white noise*, mostra una evidente correlazione complessiva, tanto che può essere confuso con un fenomeno deterministico. Un processo in cui è presente *random walk* è quello in cui l'errore della  $k$ -esima osservazione è esprimibile nella forma  $v_k + \frac{v_j}{j+1}$ , dove i  $v_j$  sono errori accidentali, ossia *white noise*. È facile constatare che  $E\{v_k} = 0$ , mentre la dispersione è data dalla matrice di varianza covarianza (Zhang et al, 1997):

$$Q_r = f_s^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}; f_s = \frac{m-1}{T} \quad [6]$$

$f_s$  è l'intervallo di campionamento. Nel *random walk* sono i valori di due errori consecutivi ad essere non correlati. In figura 1 è riportato il digramma della PSD con evidenziata la pendenza  $1/f^2$  della retta di interpolazione (pendenza -2 in scala logaritmica).

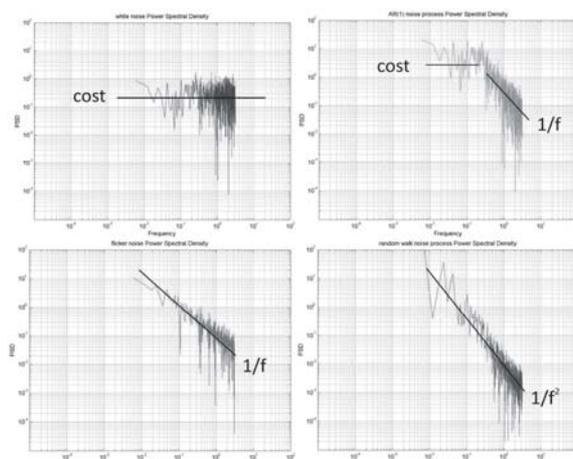


Figura 1 – PSD, da sinistra in alto, in senso orario: white noise, AR(1), flicker noise, random walk

In figura 2 destra, infine, sono esemplificati gli andamenti dei rumori descritti sopra, ottenuti per mezzo di simulazioni numeriche. L'AR(1) è stato generato per un valore di  $\rho=0.8$ .

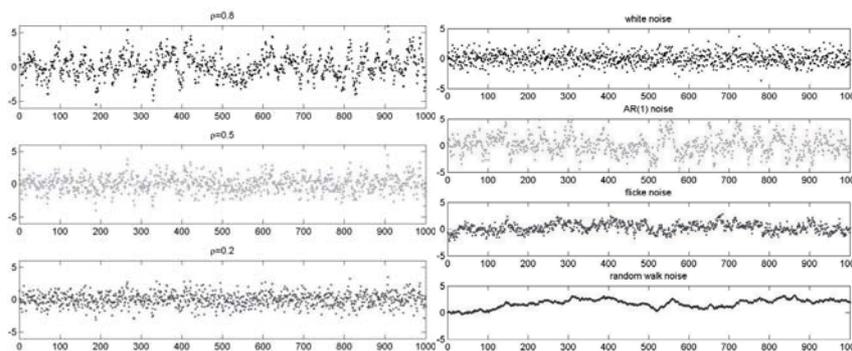


Figura 2 – Sinistra: AR(1) al variare di  $\rho$ , per  $\rho \rightarrow 0$  assomiglia al white noise, per  $\rho \rightarrow 1$  al random walk. Destra: grafici dei processi di rumore descritti in precedenza

**Minimal Detectable errors: discontinuità e cambi di velocità**

Di seguito si riportano i valori della più piccola discontinuità e del più piccolo cambio di velocità rilevabili con test statistici in una serie lunga dieci anni. La serie è stata ritenuta affetta da alcune combinazioni di rumore: solo WN, WN+AR(1), WN+FN, WN+RW. In figura 3 i grafici sono di-

stinti in base al valore di  $\rho$ . Nell'ipotesi che il modello di interpolazione della serie sia lineare,  $y(t) = rt + y_0$ , i valori della *reliability* interna sono per la discontinuità:

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{c}'_y P Q_e P \mathbf{c}_y}} \quad \text{con} \quad c_y(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq k \\ 1 & \text{if } i > k \end{cases} \quad [7]$$

per il cambio di velocità:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{c}'_y P Q_e P \mathbf{c}_y}} \quad \text{con} \quad c_y(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq k \\ (t_i - t_k) & \text{if } i > k \end{cases} \quad [8]$$

$\lambda_0$  è il parametro di non centralità (livello di significatività e potenza del test assunti rispettivamente di 0.001 e 0.80),  $P$  è la matrice dei pesi e  $Q_e$  è la matrice di varianza covarianza dei residui.  $P$  è stata considerata di volta in volta pari a  $P = Q_{wn}^{-1}$ ,  $P = (Q_{wn} + Q_{ar(1)})^{-1}$ ,  $P = (Q_{wn} + Q_{fn})^{-1}$ ,  $P = (Q_{wn} + Q_{rw})^{-1}$ . I valori assunti per i rumori sono quelli riportati nella bibliografia, in particolare si sono considerati i seguenti fattori di varianza:  $\sigma_{wn} = \sigma = 3 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{fn} = 5 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{wrw} = 5 \text{ mm} / \text{yr}^{0.5}$ .

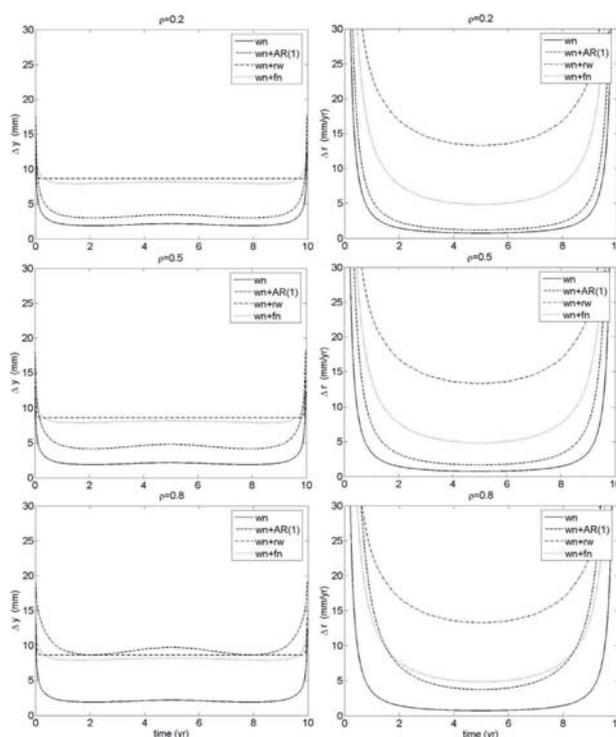


Figura 3 - Valori della minima discontinuità ( $\Delta y$ ) e del più piccolo cambio di velocità ( $\Delta r$ ) rilevabili al variare di  $\rho$

Osservando i valori di  $\Delta y$  risulta evidente come il RW rappresenti una condizione limite, il valore ipotizzato per il suo fattore di varianza fa sì che sia abbastanza difficile individuare discontinuità inferiori ad 1 cm. Il valore del fattore di varianza usato per il FN produce risultati pressoché identici. All'aumentare di  $\rho$ , l'AR(1) tende a manifestarsi in modo simile al RW, quindi valgono le stesse considerazioni fatte per i due tipi di rumore appena descritti. Si può affermare che le simulazioni

condotte indicano che, mediamente, nella migliore delle ipotesi (WN+AR(1)), è difficile individuare discontinuità di entità inferiori a 3-5 mm, se i valori dei rumori considerati corrispondono alla realtà. Anche per quanto riguarda  $\Delta r$  il RW (per il valore del fattore di varianza considerato) rappresenta una condizione limite; i cambi individuabili, in caso sia presente FN, sono la metà di quelli del RW; nel caso sia presente solo WN allora si scende a circa 1/7. L'AR(1) ha comportamenti molto simili al WN per valori di  $\rho$  bassi; per  $\rho=0.8$  tende a dare effetti simili a quelli del FN; per  $\rho \rightarrow 1$  gli effetti tendono a quelli del RW. In generale si può affermare che, per i valori dei fattori di varianza usati, FN e RW rendono difficile individuare cambi di velocità inferiori a 5-15 mm/anno, stessa cosa vale per l'AR(1) con  $0.5 < \rho \leq 1$ .

### Conclusioni

È evidente quanto sia complicata la ricerca di potenziali segnali di natura geofisica (salti e cambi di velocità) in di serie temporali di coordinate di stazioni GNSS permanenti, se i processi di rumore qui ipotizzati corrispondono a quelli reali. A tal fine è necessario disporre di serie in cui i processi di rumore siano maggiormente attenuati: sono auspicabili quindi miglioramenti nell'hardware della strumentazione GNSS, ed anche nei modelli utilizzati dai software di elaborazione dei dati. Per quanto riguarda l'analisi è necessario procedere con tecniche più sofisticate.

### Bibliografia

- Agnew DC (1992), "The Time-Domain Behavior of PowerLaw Noise". *Geophys Res Lett*, Vol. 19, no. 4: 333-336
- Amiri-Simkooei, AR (2007), "Least-squares variance component estimation: Theory and GPS applications". *Ph.D. thesis, TU Delft, Pub. on Geodesy, 64, Netherlands Geodetic Comm. Delft*
- Amiri-Simkooei AR, Tiberius CCJM, Teunissen PJG (2007), "Assessment of noise in GPS coordinate time series: methodology and results". *J Geophys Res* 112:B07413. doi:10.1029/2006JB004913
- Denny MW, Helmunth B, Leonard GH, Harley CDG, Hunt LJH, and Nelson EK (2004), "Quantifying scale in ecology: lessons from a wave-swept shore". *Ecological Monographs* 74:513-532. Ecological Archives M074-011-A7
- Erland S, Greenwood PE (2007), "Constructing noise from reversible Markov chains". *Phys. Rev. E*, 76
- Gruneis F, Musha T (1986), "Clustering Poisson process and 1/f noise". *Jap. J. Applied Phys.*, 25:1504-1509
- Gruneis F (2001), "1/f noise, intermittency and clustering Poisson process". *Fluct. Noise Lett.*, 1:R119--R130
- Kaulakys B Meškauskas T (1998), "Modeling 1/f noise". *Phys. Rev. E*, 58:7013--7019.
- Kaulakys B, Gontis V, Alaburda M (2005), "Point process model of 1/f noise vs a sum of Lorentzians". *Phys. Rev. E*, 71:051105; cond-mat/0504025
- Kaulakys B, Ruseckas J, Gontis V, Alaburda M (2006), "Nonlinear stochastic models of 1/f noise and power-law distributions". *Physica A*, 365:217-221; cond-mat/0509626
- Kenyeres A, and Bruyninx C (2004), "EPN coordinate time series monitoring for reference frame maintenance". *GPS Solut.*, 8, 200 - 209, doi:10.1007/s10291-004-0104-8.
- Lowen B, Teich MC (2005), "Fractal-based Point Processes". *Hoboken, NJ: Wiley*
- Mao A, Harrison CGA, Dixon T (1999), "Noise in GPS time-series". *J Geophys Res Solid Earth*, vol.104, no. B2: 2797-2816, 10.1029/1998JB900033
- Williams SDP (2003), "Offsets in Global Positioning System time series". *J Geophys Res*, vol.108 (B6), 2310, doi:10.1029/2002JB002156
- Zhang J, Bock Y, Johnson H, Fang P, Williams S, Genrich J, Wdowinski S, Behr J (1997), "Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates and site velocities". *J Geophys Res-Solid Earth*, 102 (B8), 18035-18055