

PROBLEMI CON DISCONTINUITÀ LIBERE NELLA SEGMENTAZIONE DI IMMAGINI E DI SEGNALI MONODIMENSIONALI

Alfonso VITTI

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università degli Studi di Trento,
via Mesiano 77, 38100 Trento, tel. 0461 882608, Fax 0461 882672
e-mail: alfonso.vitti@ing.unitn.it, vincitore del Premio AUTeC 2008

Riassunto

Nel lavoro si è studiata la formulazione variazionale del problema della segmentazione di immagini e di segnali monodimensionali secondo i modelli proposti da Mumford e Shah e da Blake e Zisserman. Si introducono brevemente le caratteristiche salienti di questi modelli che li configurano come problemi con discontinuità libere e i passaggi che ne permettono l'implementazione numerica. Lo studio ha voluto legare gli aspetti teorici alla loro applicazione a casi di interesse pratico attraverso lo sviluppo di programmi di calcolo originali.

Abstract

The mathematical framework involved in the variational formulation of one dimensional signals and images segmentation is inspected and reviewed. In particular, the "free discontinuity problem" arising from the variational approach to the segmentation has been studied along with the procedure leading to its numerical implementation. The work has been carried out to link the theory and its application by the development of original software.

1. Introduzione

E' possibile considerare la segmentazione di una funzione data g come la suddivisione, secondo certi criteri, del suo dominio Ω in regioni omogenee e disgiunte Ω_i . In generale si richiede che queste regioni presentino, al loro interno, una rumorosità inferiore rispetto a quella del dato e che i bordi delle regioni rimangano ben individuabili. Viste queste caratteristiche, si intuisce come la segmentazione di una immagine possa costituire un utile pre-processamento in vista, per esempio, dell'applicazione di algoritmi di classificazione. Nell'analisi di segnali, più in generale, la segmentazione permette la individuazione di zone del segnale con caratteristiche omogenee attraverso un processo di *smoothing* del dato e di conservazione delle sue discontinuità. Vale la pena osservare che i "bordi" sono proprio il luogo dei punti dove il dato non può considerarsi omogeneo, cioè dove il dato presenta delle discontinuità e che queste non sono note *a priori*.

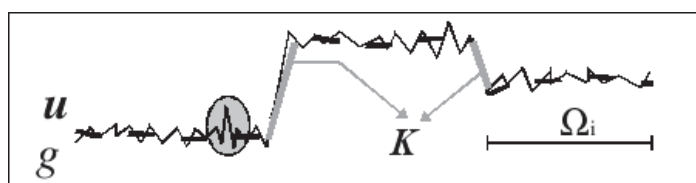


Figura 1 - Schematizzazione della segmentazione u di un dato g e delle sue discontinuità K .

Da un punto di vista matematico la segmentazione si può formulare seguendo un approccio variazionale e cioè attraverso la formulazione di un problema di minimo. Nel definire il modello variazionale si identificano delle appropriate grandezze che si devono rendere minime e che possono essere viste come termini di penalizzazione la cui natura risulta legata alle caratteristiche della soluzione che si vuole ottenere. In questo senso, nel modello variazionale proposto da Mumford e Shah (Mumford, Shah, 1989) si richiede di rendere minimi i contributi di tre termini distinti. In particolare la segmentazione u del dato e l'individuazione esplicita delle discontinuità K si ottiene chiedendo a) che la soluzione sia il più possibile "vicina" al dato, b) che la soluzione sia il più possibile "liscia" all'interno di ogni regione omogenea e c) che la lunghezza delle discontinuità risulti la più "piccola" possibile. Il modello proposto da Blake e Zisserman (Blake, Zisserman, 1987) include un ulteriore termine che controlla la presenza di punti di discontinuità della derivata di g . In oltre, in tale modello il termine che forza la soluzione a essere "liscia" è del secondo ordine, e non del primo come nel modello di Mumford e Shah.

Il modello di Mumford e Shah presenta due importanti caratteristiche. I due termini di superficie che spingono la soluzione u a rimanere "vicina" al dato g e a essere "liscia" all'interno delle regioni che segmentano il dato competono con il termine geometrico che controlla la "lunghezza" delle discontinuità che è concentrato sull'insieme di dimensione uno K che non è noto *a priori* e che costituisce una incognita rilevante del problema. A questo proposito è necessario notare che per dimostrare l'esistenza della soluzione del problema di minimo l'insieme K dei bordi delle regioni omogenee dovrà essere sostituito dall'insieme S_u delle discontinuità della funzione u che non sono necessariamente linee chiuse. Problemi variazionali di questo tipo, dove l'incognita è una coppia (u, S_u) , sono noti in letteratura come "problemi con discontinuità libere" e sono stati originariamente introdotti e studiati da Ennio De Giorgi, (De Giorgi, 1991). Il modello di Blake e Zisserman è anch'esso un problema di questo tipo. Un ulteriore contributo dato da Ennio De Giorgi e da Luigi Ambrosio allo studio dei problemi con discontinuità libere è lo sviluppo dello spazio delle funzioni speciali a variazione limitata, SBV, (Ambrosio et al., 2000). In questo spazio funzionale è infatti possibile definire una formulazione "debole" di problemi di minimo che, come quelli originariamente formulati da Mumford e Shah e da Blake e Zisserman, non si possono studiare e risolvere usando i Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni (Dacorogna, 1989). Sebbene la formulazione debole dei modelli di Mumford e Shah e di Blake e Zisserman risultino analiticamente più trattabili, la loro implementazione numerica rimane particolarmente complicata non essendo ancora immediato individuare una rappresentazione conveniente dell'insieme delle discontinuità S_u . Per arrivare a una formulazione che sia numericamente trattabile è necessario un ulteriore passo che è quello della individuazione di una approssimazione (Braides, 1998) della forma debole dei modelli di Mumford e Shah e di Blake e Zisserman. Lo sviluppo di tali approssimazioni si basa ancora su un altro importante contributo di Ennio De Giorgi: la definizione e la formalizzazione delle teoria della Γ -convergenza (De Giorgi, Franzoni, 1975; Braides, 2002). Attraverso la Γ -convergenza è possibile descrivere il comportamento asintotico di famiglie di problemi di minimo dipendenti da parametri a problemi di minimo che non dipendono da parametri e viceversa. La natura dei parametri può essere di tipo geometrico come quelli che appaiono nelle approssimazioni variazionali di problemi con discontinuità libere. La natura dei parametri può essere anche di tipo costitutivo, come quelli che compaiono ad esempio nel campo dell'Ingegneria nei problemi di omogenizzazione.

Il modello di Mumford e Shah per la segmentazione di immagini è stato implementato in una libreria scritta in linguaggio C alla quale si appoggia anche un nuovo modulo per il GIS GRASS.

Il modello di Blake e Zisserman per la segmentazione di segnali monodimensionali è stato implementato in una seconda libreria alla quale si appoggia un programma a riga di comando.

I due modelli si sono applicati rispettivamente a immagini e segnali sintetici con il fine di verificare il funzionamento dei codici sviluppati, di testare le caratteristiche dei modelli evidenziando praticamente alcune loro proprietà teoriche. A valle di questi test si è poi valutato il risultato della segmentazione di ortofoto e di serie temporali di coordinate di stazioni permanenti.

Nel seguito si presenta brevemente il funzionale di Mumford e Shah e si riporta una trattazione sintetica e schematica della procedura che permette di passare dalla sua formulazione originale alla sua implementazione numerica. Il funzionale di Blake e Zisserman viene successivamente presentato evidenziando sostanzialmente solo le principali differenze che lo distinguono da quello di Mumford e Shah o sul piano teorico o sul piano della sua implementazione numerica. Per una trattazione più estesa e per una estensione del modello di Mumford e Shah si fa riferimento a (Vitti, 2008) e (March, Dozio, 1997). Si riportano qui solo alcuni esempi significativi della segmentazione di immagini e di segnali monodimensionali. Per ulteriori esempi e una descrizione della implementazione numerica dei modelli variazionali presentati si veda ancora (Vitti, 2008).

2. Il funzionale di Mumford-Shah per la segmentazione di immagini

L'espressione del modello variazionale per la segmentazione di immagini proposto da Mumford e Shah (Mumford, Shah, 1989) è la seguente:

$$MS(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \lambda \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \alpha H^1(K \cap \Omega), \quad [1]$$

dove g è il dato, λ e α sono due parametri reali positivi, H è la misura di Hausdorff della lunghezza dell'insieme K dei bordi delle regioni omogenee e u è la funzione che segmenta il dato. Attraverso la minimizzazione dei termini che compaiono nella [1] si chiede che:

1. la soluzione u resti "il più vicino possibile" al dato;
2. la soluzione u sia "la più liscia possibile" all'interno delle regioni omogenee;
3. la lunghezza dei bordi delle regioni omogenee sia "la più piccola possibile".

Intuitivamente la funzione del terzo termine è quella di evitare che vengano individuate discontinuità che non rappresentino il bordo tra due regioni omogenee. Si veda per esempio l'area cerchiata in Figura 1.

Come accennato, per poter studiare analiticamente il problema di minimo associato alla [1] è particolarmente conveniente definire una sua forma debole nello spazio delle funzioni speciali a variazione limitata e sostituire l'insieme K con l'insieme S_u delle discontinuità di u . La forma debole di [1] è:

$$MS^w(u) = \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha H^1(S_u), \quad [2]$$

Nella formazione debole [2] non appare più l'insieme di discontinuità del dato. Il funzionale dipende dalla sola incognita u . Sono ancora presenti due integrali di superficie e la misura monodimensionale dell'insieme di discontinuità della stessa u .

Ambrosio e Tortorelli (Ambrosio, Tortorelli, 1990) proposero di approssimare, nel senso della Γ -convergenza, la [2] con:

$$AT_{\varepsilon}(u, K) = \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} z^2 |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \left[\varepsilon |\nabla z|^2 + \frac{(1 - z)^2}{4\varepsilon} \right] dx. \quad [3]$$

La approssimazione proposta da Ambrosio e Tortorelli sfrutta un importante risultato di Modica e Mortola (Modica, Mortola, 1977) che permette di approssimare, ancora nel senso della Γ -convergenza, la misura di Hausdorff di S_u con il terzo integrale della [3]. Nella [3] compare la funzione ausiliaria z che è direttamente legata alla funzione caratteristica di u oltre al parametro di Γ -convergenza ε . Si noti che gli integrali che compaiono nella [3] sono ora tutti integrali di superficie. La soluzione della [3] si può calcolare risolvendo l'equazione di Eulero ad essa associata. L'equazione di Eulero è in realtà un sistema di due equazioni differenziali non lineari che può essere discretizzato alle differenze finite. Il sistema discreto si risolve poi iterativamente.

In Figura 2 si riporta una selezione del risultato della segmentazione (al centro) di una ortofoto (a sinistra) alla risoluzione di 1x1m e (a destra) la funzione di discontinuità z che compare nella [3].

In Figura 3 si riportano i risultati di una classificazione non supervisionata basata sul modello della massima verosomiglianza due zone della stessa ortofoto (1a e 3a immagine) e delle corrispondenti segmentazioni (2a e 4a immagine).

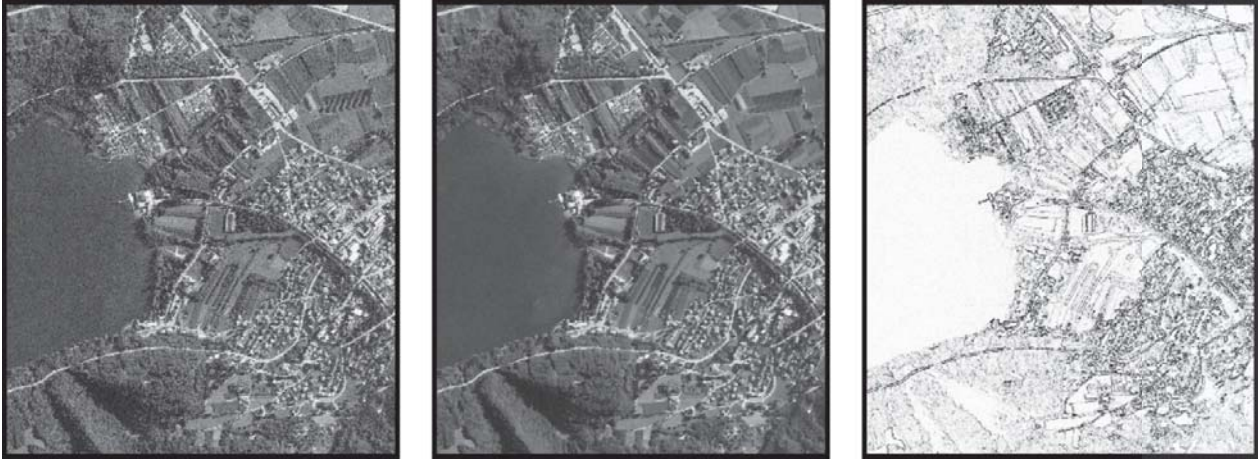


Figura 2 - Segmentazione, (al centro) di una ortofot, (a sinistra) e la funzione di discontinuità z , (a destra).



Figura 3 - Classificazione di una ortofoto (1a e 3a immagine) e della versione segmentata della stessa ortofoto (2a e 4a immagine).

3. Il funzionale di Blake-Zisserman per la segmentazione di segnali monodimensionali

Il funzionale proposto da Blake e Zisserman (Blake, Zisserman, 1987) in dimensione uno ha la forma:

$$BZ(u, K_0, K_1) = \int_{\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)} (u - g)^2 dx + \lambda \int_{\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)} |u''|^2 dx + \alpha \#(K_0) + \beta \#(K_1), \quad [4]$$

dove il termine che forza la soluzione u a essere “liscia” è del secondo ordine e dove si controlla, attraverso la misura del conteggio ($\#$), l'insieme K_0 delle discontinuità della u e l'insieme K_1 delle discontinuità della sua derivata prima.

Analogamente a quanto descritto per il funzionale di Mumford e Shah, anche per la [4] risulta necessaria la definizione di una sua forma debole e successivamente di una sua approssimazione variazionale.

Si riporta qui solo una espressione semplificata della approssimazione proposta da Bellettini e Coscia (Bellettini, Coscia, 1994):

$$BC_\varepsilon(u, \sigma, s) = \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} s^2 |u''|^2 dx + (\alpha - \beta)M(\sigma) + \beta M(s), \quad [5]$$

Dove le funzioni σ e s si comportano come la funzione z in [3] e sono legate alle funzioni caratteristiche rispettivamente della u e della sua derivata prima. Il termine M ha la forma del terzo integrale della [3]. E' possibile ricavare numericamente la soluzione della [5] anche seguendo un percorso diverso da quello descritto per la soluzione numerica della [3]. In particolare si può discretizzare agli elementi finiti direttamente la [5], senza bisogno quindi di derivare l'equazione di Eulero associata, e poi, ancora con un metodo alla Newton e un procedimento iterativo, calcolarne i minimi.

In Figura 4 si riporta (sopra) la segmentazione di una serie storica di una coordinata di una stazione permanente e (sotto) la funzione di discontinuità σ che individua nettamente una discontinuità in corrispondenza della settimana GPS 1400.

In Figura 5 si riporta la segmentazione di un altro dato dello stesso tipo eseguita sia con il modello di Mumford e Shah (sopra) che con quello di Blake e Zisserman (sotto).

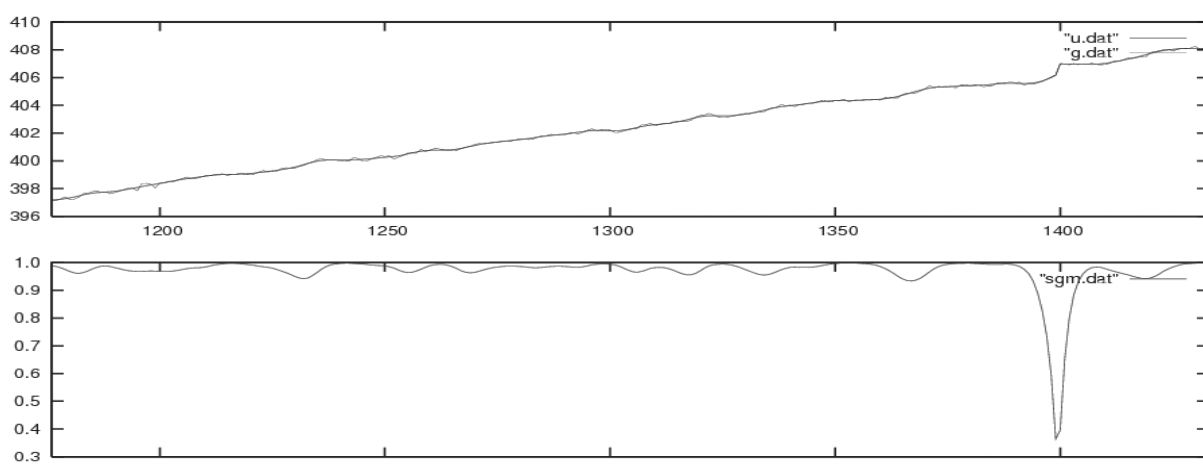


Figura 4 - Segmentazione di una serie storica di una coordinata di una stazione permanente e la funzione di discontinuità σ .

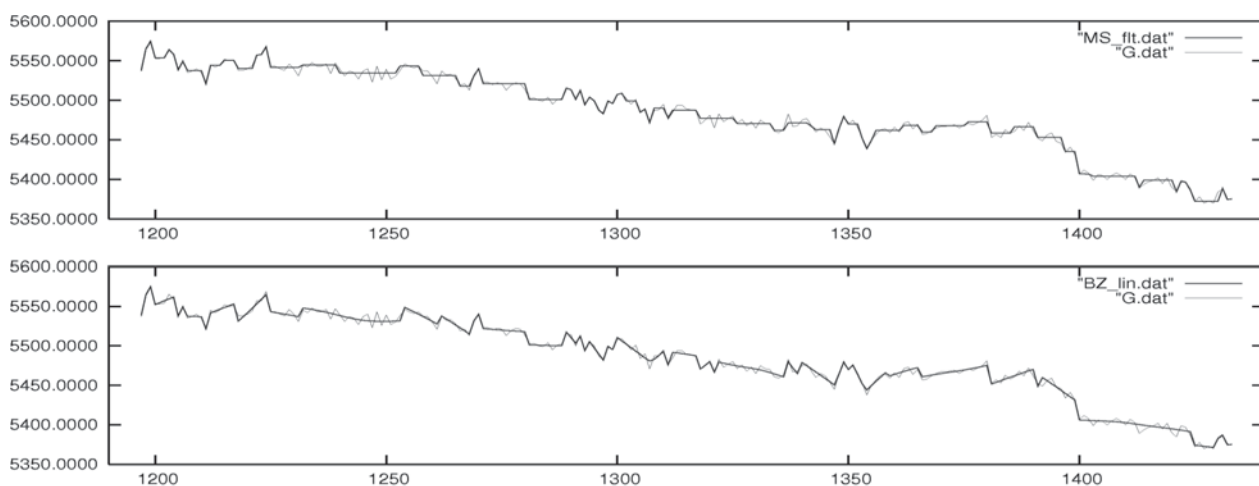


Figura 5 - Segmentazione di una serie storica di una coordinata di una stazione permanente con il modello di Mumford e Shah (sopra) e di Blake e Zisserman (sotto).

4. Conclusioni e prospettive

Sulla base dei test condotti entrambi i modelli descritti producono ottimi risultati. Dalla Figura 3 si osserva in particolare il migliore risultato ottenuto classificando la versione segmentata di una ortofoto rispetto a quello ottenuto con una classificazione diretta della ortofoto.

Il codice sviluppato è stabile e affidabile. In particolare il nuovo modulo per il GIS GRASS risulta essere adatto anche per le applicazioni proprie di una utenza finale. Si sottolinea come lavorare nell'ambiente GRASS risulti particolarmente conveniente visti gli strumenti di gestione, analisi e visualizzazione disponibili al suo interno.

Dalla Figura 5 si osserva come il modello di Blake e Zisserman, essendo del secondo ordine, tenda a produrre una segmentazione “lineare” a tratti e non a una segmentazione “costante” a tratti come invece il modello del primo ordine di Mumford e Shah.

L'applicazione del modello monodimensionale di Blake e Zisserman appare promettente anche in ambiti diversi da quello presentato, per esempio per l'individuazione di cycle slips in misure di fase. La presenza di un termine del secondo ordine suggerisce lo studio e l'implementazione anche della sua versione in due dimensioni, per esempio per il processamento di dati lidar.

5. Note bibliografiche

La letteratura disponibile sugli argomenti qui solo accennati è particolarmente vasta e articolata. Per motivi di trattazione e di spazio si è scelto nel testo di citare solo pochi lavori tra i molti essenziali. Per una bibliografia più ampia e per altre citazioni puntuali si veda (Vitti, 2008).

Ambrosio L., Tortorelli V.M. (1990). “Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43: 999-1036.

Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. (2000), *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, London.

Bellettini C., Coscia A. (1994), “Approximation of Functional Depending on Jumps and Corners”, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 8-B: 151-181.

Blake A., Zisserman A. (1987), *Visual Reconstruction*, The MIT Press, Cambridge.

Braides A. (2002), *Gamma-convergence for beginners*, Oxford lecture series in mathematics and its applications, vol. 22. Oxford University Press, London.

Braides A. (1998), *Approximation of free-discontinuity problems*, Lecture notes in mathematics, vol. 1694. Springer, Berlin.

Dacorogna B. (1989), *Direct methods in the calculus of variations*. Applied Mathematical Sciences, vol. 78. Springer-Verlag, New York.

De Giorgi E., Franzoni T. (1975), “Su un tipo di convergenza variazionale”, in *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 58(8): 842-850.

De Giorgi E., (1991), *Free discontinuity problems in calculus of variations*, Frontiers in Pure and Applied Mathematics, a collection of papers dedicated to J.L. Lions on the occasion of his 60th birthday, 55-62.

March R., Dozio M. (1997), “A variational method for the recovery of smooth boundaries”, *Image and Vision Computing*, 15: 705-712.

Modica L., Mortola S. (1977), “Un esempio di Γ -convergenza”, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 14-B: 285-299.

Mumford D., Shah J. (1989), “Optimal Approximation by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems”, *Communications on Pure Applied Mathematics*, 42: 577-685.

Vitti A. (2008), “Free Discontinuity Problems in Image and Signal Segmentation”. Doctoral Scholl on Environmental Engineering, University of Trento, Italy. [www.ing.unitn.it/dica/tools/download/PhD Thesis Vitti .pdf](http://www.ing.unitn.it/dica/tools/download/PhD%20Thesis%20Vitti.pdf)