

## ANALISI FRATTALE DEI RETICOLI IDROGRAFICI ESTRATTI AUTOMATICAMENTE DA DEM

Stellina LA PORTA (\*), Leonardo V. NOTO (\*), Goffredo LA LOGGIA (\*)

(\*) Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Applicazioni Ambientali, Università di Palermo, viale delle Scienze, 90128 Palermo, tel 091 6657726, fax 091 667749, e-mail [stefania.laporta@gmail.com](mailto:stefania.laporta@gmail.com), [valerio@idra.unipa.it](mailto:valerio@idra.unipa.it), [glal@idra.unipa.it](mailto:glal@idra.unipa.it)

### Abstract

Lo sviluppo ed il continuo perfezionamento delle tecnologie informatiche in campo idrologico, con particolare riferimento ai *Modelli Digitali dell'Elevazione (DEM)*, hanno permesso l'estrazione del reticolo e la delimitazione del bacino idrografico in maniera automatica, agevolando, così, la determinazione dei parametri geomorfologici e topologici del bacino.

Numerosi studi, svolti dopo la metà del secolo scorso nell'ambito della geomorfologia fluviale, hanno portato alla formulazione di numerose leggi di potenza, che mostrano come alcune proprietà del territorio, siano invarianti con la scala di osservazione (*leggi di scaling*). Molte di queste leggi (*leggi di Horton, legge di Hack, etc.*) hanno acquisito gran parte della loro notorietà in virtù del loro legame con la geometria frattale dei reticoli idrografici. Quest'ultimi, infatti, possono essere assimilati a delle strutture frattali in quanto governati dalla proprietà di *self-similarity*. Vari sono stati gli studi sulla caratterizzazione delle proprietà frattali e sulla determinazione della dimensione frattale dei reticoli.

Il presente lavoro è finalizzato alla verifica delle suddette proprietà per alcuni bacini siciliani attraverso l'utilizzo di diverse metodologie, che si appoggiano ai due più famosi schemi ordinativi dei reticoli idrografici, Horton-Strahler e Shreve, costituenti la base dei modelli idrologici di tipo geomorfologico. A partire da questi schemi, vengono definiti i parametri geomorfologici utilizzati per i tredici bacini esaminati e viene analizzata la variabilità di questi fattori con il parametro che ne definisce gli effetti di scala: l'area di soglia utilizzata per l'estrazione dei reticoli idrografici. In particolare, per ciascun bacino, si è proceduto alla determinazione della dimensione frattale relativa ai reticoli estratti per diversi valori di area di soglia, seguendo due metodologie: la prima fa riferimento ai rapporti di Horton, la seconda si basa su un'analisi della rete secondo lo schema ordinativo di Shreve. La dimensione frattale è stata, inoltre, esaminata in relazione alla probabilità di eccedenza rispettivamente delle lunghezze e delle aree, verificando, infine, la validità della legge di Hack per i bacini esaminati. I risultati ottenuti hanno dimostrato che tutti i bacini presentano le caratteristiche di *self-similarity* tipiche delle strutture frattali con dimensione frattale inferiore a 2.

### Abstract

Development and continuous improvement of computer technology in hydrology, especially related to *Digital Elevation Models (DEM)*, allowed automated extraction of channel networks and watershed delimitation, making easier in this way determination of geomorphological and topological basin parameters.

Several studies, over the last half-century in fluvial geomorphology, have led to discover many power law, which indicate that some properties of landscapes are invariant under changes of scale (*scaling law*). Many of these laws (Horton's laws, Hack's law, etc.) have become famous because of their relationship with fractal geometry of channel networks. These structures, indeed, can be examined as fractal structures because governed by properties of *self-similarity*. There are extensive

studies dealing with characterization of fractal properties and determination of fractal dimension of river networks.

In this paper, the purpose is to verify the above-mentioned properties in some river basin in Sicily, using different methods, all based on the most commonly used channel network ordering systems, respectively Horton-Strahler and Shreve. Using these ordering systems, geomorphological parameters have been estimated for thirteen study basins. It's also investigated how these parameters change with the area threshold used to extract river network. In detail, for each river basin and for all the channel networks extracted with different area thresholds, the fractal dimension has been determined using two different techniques: using Horton's ratios and using Shreve ordering system. Moreover, fractal dimension has been estimated analysing geometric stream length exceedence probability and area exceedence probability. Finally Hack's law has been tested out for the study river basins. Results showed that all basins are characterised by *self-similarity* property as it is typical for fractal structures and their fractal dimension is less than 2.

## 1 Introduzione

L'individuazione dei parametri geomorfologici, nell'ambito della modellistica idrologica, risulta di fondamentale importanza ai fini della determinazione della risposta idrologica di un bacino. Le caratteristiche topografiche e geomorfologiche del bacino, quali le pendenze dei canali e dei versanti, la lunghezza media dei canali e la densità di drenaggio, infatti, influenzano in maniera diretta la dinamica dei processi di formazione dei deflussi. L'analisi dei parametri geomorfologici, inoltre, risulta utile per la verifica delle caratteristiche frattali dei reticoli idrografici. La nozione di dimensione frattale è stata proposta da Mandelbrot (1975, 1983). Lo stesso autore (1977, 1983) ha descritto alcuni schemi geometrici di tipo frattale che somigliavano a reticoli idrografici. Il termine frattale riflette la struttura geometrica di un generico elemento, caratterizzato, all'aumentare della scala di osservazione, dalla frammentazione di ciascuna delle sue parti in tante altre auto-somiglianti. Al concetto di frattale è, infatti, associato quello di auto-somiglianza statistica. Molti elementi presenti in natura posseggono tale proprietà. Essa può essere definita come l'invarianza di scala della distribuzione di probabilità descrivente la composizione dell'elemento. La dimensione frattale è un parametro, generalmente, utilizzato per quantificare le proprietà di *scaling* di un oggetto e rappresenta la dimensione dello spazio in cui la misura euclidea dell'oggetto risulta scala-invariante (Claps e Oliveto, 1996). Vari sono stati gli studi sulla caratterizzazione delle proprietà frattali e la determinazione della dimensione frattale dei reticoli. La Barbera e Rosso (1987) per primi hanno trovato la relazione tra la dimensione frattale e i rapporti di Horton. La Barbera e Rosso (1989) hanno illustrato le ipotesi alla base della definizione della dimensione frattale dei reticoli. Tarboton et al. (1988) hanno stimato la dimensione frattale di un reticolo idrografico applicando la tecnica del box-counting, il metodo di Richardson, e la distribuzione di eccedenza delle lunghezze. Claps e Oliveto (1996) hanno cercato di unificare i vari approcci sulla stima della dimensione frattale, nell'ipotesi di comportamento *self-similar* dei reticoli idrografici.

## 2 Determinazione delle proprietà frattali di un reticolo idrografico

In letteratura scientifica è possibile trovare diverse modalità per la determinazione della dimensione frattale associata al reticolo idrografico, la maggior parte delle quali basate sull'impiego dei differenti indici geomorfologici.

Il metodo comunemente applicato, fa riferimento alle tre leggi di Horton (Horton, 1945). La legge del numero delle aste descrive la diminuzione del numero complessivo dei rami del reticolo all'aumentare del loro ordine e si esprime:

$$R_B = \frac{N_\omega}{N_{\omega+1}} \quad [1]$$

dove  $N_\omega$  è il numero dei rami di ordine  $\omega$ , valutati secondo lo schema di Horton-Strahler (Horton, 1945; Strahler, 1952, 1957).  $R_B$  viene definito rapporto di biforcazione. La legge delle lunghezze

descrive l'aumento della lunghezza media dei rami del reticolo all'aumentare del loro ordine e viene espressa:

$$R_L = \frac{\overline{L_{\omega+1}}}{\overline{L_{\omega}}} \quad [2]$$

dove  $\overline{L_{\omega}}$  è la media delle lunghezze dei rami di ordine  $\omega$  ed  $R_L$  si definisce rapporto delle lunghezze. Infine, la legge delle aree descrive l'aumento dell'area media associata ai rami del reticolo all'aumentare dell'ordine dei rami e viene espressa:

$$R_A = \frac{\overline{A_{\omega+1}}}{\overline{A_{\omega}}} \quad [3]$$

dove  $\overline{A_{\omega}}$  è il valore dell'area drenata da un ramo di ordine  $\omega$  e comprende sia l'area  $a_{\omega}$  direttamente drenata dal segmento di ordine  $\omega$  che l'area drenata di monte.  $R_A$  viene definito rapporto delle aree. I rapporti così definiti (Horton, 1945), sono per definizione, approssimativamente costanti per rami di ordine successivo, e si possono ricavare dalla rappresentazione grafica di queste leggi, ottenuta riportando i valori delle trasformazioni logaritmiche di  $N_{\omega}$ ,  $\overline{L_{\omega}}$  e  $\overline{A_{\omega}}$  al variare del corrispondente ordine  $\omega$ . Questi rapporti sono delle relazioni geometriche scala-invarianti, in quanto non dovrebbero dipendere dall'ordine né dalla risoluzione con cui viene indagato il reticolo. Secondo il metodo dei rapporti di Horton, la dimensione frattale  $D$  di un reticolo idrografico viene espressa in funzione dei rapporti di biforcazione e delle lunghezze. Sebbene esistano diverse varianti di tale espressione proposte dai differenti autori (Tarboton et al., 1988; la Barbera e Rosso, 1989, 1990) tuttavia la relazione più utilizzata è quella proposta da La Barbera e Rosso (1987):

$$D = \frac{\log R_B}{\log R_L} \quad [4]$$

I vari risultati ottenuti mostrano un consenso generale e stabiliscono che il valore della dimensione frattale di un reticolo idrografico, in virtù della sua complessità, è inferiore a 2 (Tarboton et al., 1988; Mandelbrot, 1983; La Barbera e Rosso, 1990).

Un altro metodo deriva il parametro dimensione frattale da un'analisi della rete secondo lo schema ordinativo di Shreve (Shreve, 1966), mediante la seguente espressione:

$$D = \frac{\ln(2\mu - 1)}{\ln(\lambda)} \quad [5]$$

in cui  $\mu$  e  $\lambda$  rappresentano la magnitudine ed il diametro topologico della rete.

La dimensione frattale, inoltre, può essere legata alla probabilità di eccedenza delle lunghezze, associata ad un reticolo idrografico. Mandelbrot (1983), in particolare, osservò l'esistenza di una relazione di tipo iperbolico tra la probabilità di eccedenza delle lunghezze, misurate lungo la rete, e la lunghezza  $l$ ;  $D$  è la dimensione frattale del reticolo:

$$P[L > l] \propto l^{-D} \quad [6]$$

Accanto alle lunghezze, anche le aree contribuenti di un bacino idrografico possiedono le proprietà di invarianza di scala. E' stato osservato, infatti, che per un bacino è definibile la seguente legge della probabilità di eccedenza delle aree contribuenti:

$$P[A \geq a] \propto a^{-\beta} \quad [7]$$

La distribuzione di probabilità appena definita descrive il carattere di autosomiglianza del processo in esame; rappresenta infatti, un fenomeno che mantiene le sue caratteristiche qualunque sia la scala di osservazione.

### 3 Analisi delle proprietà frattali di alcuni bacini idrografici siciliani

Le proprietà frattali dei reticoli idrografici sono state analizzate su un campione di 13 bacini idrografici siciliani (Tabella 1).

La scelta di questi bacini è stata finalizzata alla realizzazione di un campione rappresentativo delle diverse caratteristiche morfologiche, in particolare superficie e pendenza, dei bacini siciliani.

Il DEM della Sicilia, con dimensione di maglia 100 m, è stato inizialmente sottoposto alla procedura correttiva di *filling*. A seguire, utilizzando l’algoritmo *Single-Flow Direction*, sono state ricavate le direzioni di flusso e da queste delimitati i bacini idrografici sottesi dalle predefinite sezioni di chiusura. A partire dalle direzioni di flusso sono state ricavate le aree contribuenti e definiti i reticoli idrografici per fissata area di soglia. In particolare, per ciascun bacino, si è proceduto all’estrazione di diversi reticoli idrografici, con valori di soglia variabili da 10 ha ad un massimo di 1800 ha. I reticoli, ordinati secondo i due schemi di Horton-Strahler e di Shreve, hanno permesso la derivazione dei parametri geomorfologici di interesse dei bacini in esame.

La definizione di dimensione frattale secondo la definizione di Horton è strettamente dipendente dal rapporto delle lunghezze. In letteratura esistono diverse espressioni per la determinazione del rapporto hortoniano  $R_L$ . In particolare, secondo la definizione più generale dovuta ad Horton-Strahler, il rapporto delle lunghezze  $R_L$ , è dato dal rapporto tra la lunghezza media dei rami di ordine  $L_\omega$  e la lunghezza media dei rami dell'ordine immediatamente inferiore  $L_{\omega-1}$ . La seconda definizione di tale rapporto, dovuta ad Horton, ha la medesima espressione analitica, ma presenta un diverso significato per le lunghezze presenti nella relazione. In questa seconda definizione, infatti,  $L_\omega$  e  $L_{\omega-1}$  rappresentano i valori delle lunghezze cumulate fino agli ordini, rispettivamente  $\omega$  e  $\omega-1$ . Ovviamente, per come definito, tale  $R_L$  non dovrebbe essere influenzato in maniera incisiva dall’ordine della rete. Infine, è presente una terza definizione, che attribuisce ai valori delle lunghezze il medesimo significato fornito da Horton-Strahler, trascurando, però, la lunghezza del ramo assorbente. Il rapporto così determinato, a seguito dell’esclusione della lunghezza del ramo assorbente, non tiene più conto della incompletezza del reticolo. I reticoli generalmente studiati, infatti, non sfociano tutti a mare, ma vengono interrotti in corrispondenza di sezioni significative ai fini idrologici. E’ evidente, pertanto, che la lunghezza del ramo assorbente dipende fortemente dalla posizione della sezione terminale, che a sua volta si riflette, indirettamente nei valori di  $R_L$ . Nel presente studio sono state applicate tutte e tre le definizioni di  $R_L$ , per ogni bacino e per i diversi reticoli, estratti con differenti valori di area di soglia. E’ chiaro, quindi, che i valori di dimensione frattale dipendono dalla particolare definizione assunta per  $R_L$ .

ID	Bacino	Superficie [km <sup>2</sup> ]
1	Alcantara ad Alcantara	562,05
2	Baiata a Sapone	29,71
3	Belice a Belice	851,98
4	Belici a Marianopoli Scalo	227,33
5	Forza d'Agrò a Ranciarà	50,20
6	Freddo ad Alcamo Scalo	270,63
7	Imera a Besero	1001,37
8	Imera a Drasi	1788,75
9	Platani a Passofonduto	1223,32
10	Salso a Capodarso	631,69
11	Salso a Monzanaro	183,24
12	Tellaro a Castelluccio	109,84
13	Timeto a Marmari	47,26

Tabella 1 – Elenco dei bacini idrografici analizzati

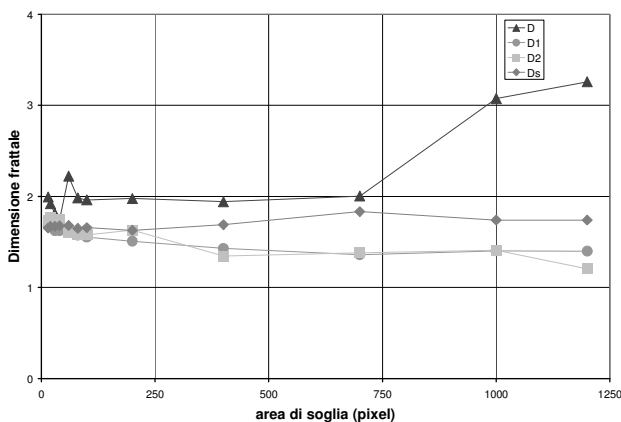


Figura 1 – Confronto tra i diversi valori di D per il bacino del Platani a Passofonduto

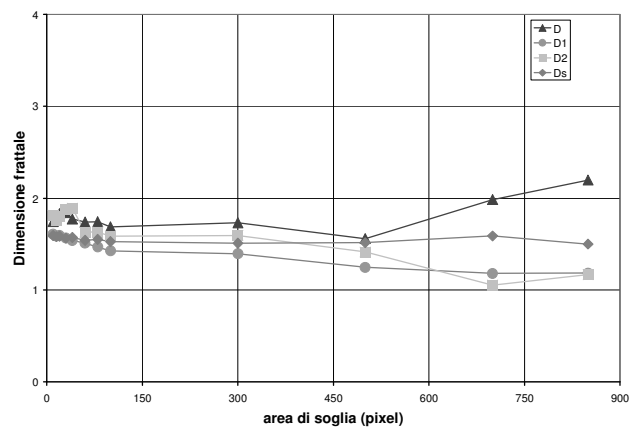


Figura 2 – Confronto tra i diversi valori di D per il bacino del Belice a Belice

Nelle figure 1 e 2, a titolo d’esempio, viene riportata la variazione della dimensione frattale al variare dell’area di soglia per i bacini del Platani a Passofonduto e del Belice a Belice. La dimensione frattale è valutata secondo le due definizioni, rispettivamente di Horton e di Shreve.

Relativamente alla definizione di Horton, sono rappresentati i valori di  $D$  valutati con le tre diverse espressioni adottabili per il rapporto delle lunghezze e rispettivamente  $D$ ,  $D_1$  e  $D_2$  mentre  $D_S$  è la dimensione frattale valutata secondo la definizione di Shreve. L'analisi complessiva dei tredici bacini evidenzia valori della dimensione frattale che si mantengono generalmente al di sotto del valore 2, come da letteratura. L'andamento pressoché costante della maggior parte dei valori assunti da  $D$  al variare dell'area di soglia, è testimonianza delle proprietà di *scaling* dei bacini in studio. L'esame comparativo degli andamenti delle quattro diverse definizioni di  $D$ , indica una ottima stabilità della dimensione frattale ricavata secondo il metodo di Shreve,  $D_S$ . Delle tre espressioni relative alla definizione di Horton, quella che suggerisce una maggiore stabilità del parametro è l'espressione legata ai valori medi delle lunghezze cumulate, mentre quella meno stabile risulta essere l'espressione in cui rientrano le lunghezze medie dei rami. Le discontinuità riscontrabili nell'andamento delle curve derivano principalmente dal cambiamento dell'ordine  $\Omega$  del reticolo. La dimensione frattale, oltre ai due metodi appena analizzati, può essere, inoltre, determinata a partire dalla probabilità di eccedenza delle lunghezze. Essa, come già anticipato precedentemente, corrisponde alla pendenza della parte terminale della curva iperbolica. In figura 3 si può osservare come per il bacino in esame tale probabilità presenti, alle grandi scale di osservazione, valori della pendenza molto prossimi tra loro. Un lieve scostamento si registra alle scale minori.

Tale proprietà della probabilità di eccedenza delle lunghezze, avvalorata, pertanto, l'ipotesi della natura frattale, e quindi la proprietà di *self-similarity* dei reticoli idrografici.

Un altro risultato di fondamentale importanza che conferma le proprietà di scala del reticolo idrografico è la probabilità di eccedenza delle aree. In figura 4 è riportata la probabilità  $P(A)$  determinate per i tredici bacini esaminati. Si può osservare una prima parte delle curve caratterizzata da valori di pendenze pressoché costanti per tutti i bacini, ulteriore testimonianza della *self-similarity* dei reticoli; ed il caratteristico andamento della parte terminale delle curve, conseguenza dell'incompletezza dei reticoli idrografici analizzati e dipendente dalla lunghezza del ramo assorbente.

Un ulteriore metodo per verificare le proprietà frattali dei reticoli è l'applicazione della legge di Hack (Hack, 1957). In particolare, la legge di Hack, esprime l'esistenza di una relazione di proporzionalità tra la massima lunghezza della rete  $L$  e l'area  $A$  del bacino secondo la seguente espressione:

$$L = A^h \quad [4]$$

con  $h$  di solito compreso tra 0,56 e 0,60.

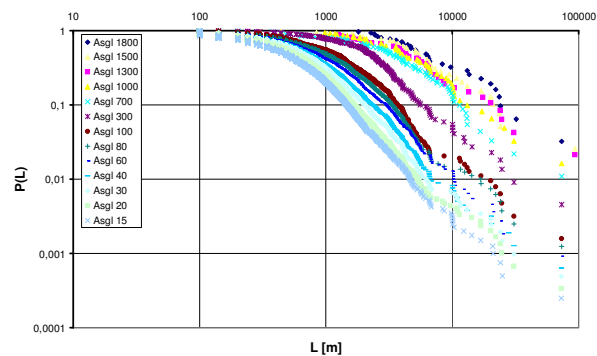


Figura 3 – Effetto dell'area di soglia sulla probabilità di eccedenza delle lunghezze per il bacino dell'Imera a Drasi

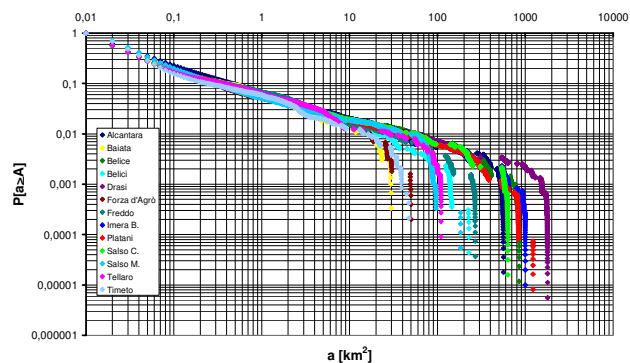


Figura 4 – Probabilità di eccedenza delle aree per i bacini esaminati

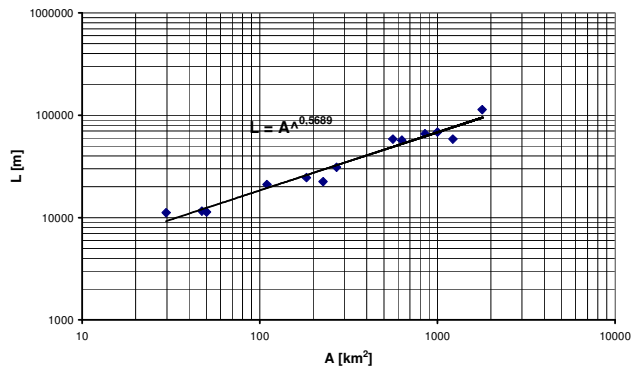


Figura 5 – Applicazione della legge di Hack ai bacini esaminati

Tale legge, applicata al caso in studio, ha fornito un valore di  $h$  pari a 0,66. Tale valore maggiore di 0,5 giustifica la presenza di caratteristiche frattali nei reticoli. La dimensione frattale media dei reticoli in esame, infatti, può essere ricavata come  $D = 0,66 \cdot 2 \approx 1,3$ . La figura 5 riporta il grafico della suddetta legge di Hack applicata ai bacini siciliani esaminati.

### Conclusioni

L'importanza della determinazione dei parametri geomorfologici e topologici deriva

dal ruolo fondamentale che la geomorfologia fluviale riveste sulla dinamica dei processi di formazione dei deflussi. I parametri geomorfologici risultano utili per la verifica delle proprietà di *scaling* dei bacini idrografici. In tale contesto, la determinazione della dimensione frattale si mostra un importante strumento per investigare le proprietà di scala-invarianza dei bacini. L'analisi frattale dei reticoli idrografici siciliani esaminati è stata condotta seguendo due metodologie, basate rispettivamente sull'ordinamento di Horton-Strahler e di Shreve. I risultati ottenuti hanno dimostrato che tutti i reticoli relativi ai tredici bacini esaminati, presentano le caratteristiche di *self-similarity* tipiche delle strutture frattali. I relativi valori di dimensione frattale, infatti, sono risultati essere inferiore a 2, che rappresenta il valore tipico di  $D$  associato ad un reticolo. I valori di  $D$  determinati mediante gli indici di Horton, ed in particolare utilizzando la definizione Hortoniana del rapporto delle lunghezze, descrivono un andamento regolare con il variare dell'area di soglia, motivo per cui sono stati assunti come valori rappresentativi della dimensione frattale associata ai singoli reticoli per determinata area di soglia. L'analisi della probabilità di eccedenza delle lunghezze, per le diverse aree di soglia e per ciascun bacino, ha confermato le proprietà scala-invarianti dei bacini.

### Riferimenti bibliografici

- Claps P., Oliveto G. (1996), "Reexamining the determination of the fractal dimension of river networks", *Water Resources Research*, 32: 3123-3135
- Hack, J.T., "Studies of longitudinal profiles in Virginia and Maryland", *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, 294-B
- La Barbera P., Rosso R. (1987), "Fractal geometry of river networks", *EOS Trans. AGU*, 68(44).
- La Barbera P., Rosso R. (1989), "On the fractal dimension of stream networks", *Water Resources Research*, 25: 735-741
- La Barbera P., Rosso R. (1990), "On fractal dimension of streams networks, Reply to Tarboton et al.", *Water Resources Research*, 26: 2245-2248
- Mandelbrot, B.B. (1975), *Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris
- Mandelbrot, B.B. (1977) *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco
- Mandelbrot, B.B. (1983), *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York
- Horton, R.E. (1945), "Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology", *Bull. Geol. Soc. Am.*, 56: 275-370
- Shreve, R. L., (1966), "Statistical law of stream numbers", *Journal of Geology*, 74: 17-37
- Strahler, A. N. (1952), "Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography", *Bull. Geol. Soc. Am.*, 63: 1117-1142
- Strahler, A. N. (1957), "Quantitative analysis of watershed geomorphology", *EOS Trans. AGU*, 38: 912-920
- Tarboton, D.G., R.L. Bras, I. Rodriguez-Iturbe (1988), "The fractal nature of river networks", *Water Resources Research*, 24(8): 1317-1322