MOMENTI GEOMETRICI TRIDIMENSIONALI NEL RICONOSCIMENTO DELLE FORME

Maria Grazia D'URSO

Università degli Studi di Cassino - via G. Di Biasio, 43 - 03043 Cassino (FR). E-mail: durso@unicas.it

Riassunto
Si dimostrano alcuni dei risultati impiegati in un precedente lavoro (D'Urso, 2004) allo scopo di illustrare nei minimi dettagli il procedimento utilizzato per derivare l'espressione dei momenti geometrici di ordine 0 e 1 di poliedri in funzione delle coordinate dei vertici. In particolare, si esplicita l'approccio seguito per pervenire all'espressione dei momenti di ordine 2 riportando altresì, senza dimostrazione per motivi di spazio, la formula relativa ai momenti di ordine 3.

Abstract
We prove some of the results employed in a previous paper (D'Urso, 2004) in order to illustrate in great detail the procedure adopted to derive the expression of the 0^{th} - and 1^{st}-order geometric moments of polyhedra as function of the vertices coordinates. In particular, it is detailed the approach adopted to obtain the expression of the 2^{nd}-order moments by reporting in addition, without proof due to space limitations, the formula pertaining to the 3^{rd}-order moments.

Introduzione
Il momento geometrico cartesiano m_{pqr}, o più semplicemente *momento*, di un oggetto solido S è definito (Mukundan, Ramakrishnan, 1998) come l'integrale esteso alla regione occupata da S del prodotto $x^p\ y^q\ z^r$ dove x, y e z rappresentano le coordinate cartesiane di un generico punto dell'oggetto mentre p, q e r sono interi positivi arbitrari.
L'interesse per tali quantità, e quindi per il loro calcolo, scaturisce dal fatto che i momenti geometrici sono frequentemente impiegati come proprietà globali invarianti di immagini nel riconoscimento di forme, classificazione di oggetti e, più in generale, nel trattamento delle immagini (Mukundan, Ramakrishnan, 1998), (Gonzales, Woods, 2002). Approcci analitici per il calcolo dei momenti di oggetti tridimensionali possono essere trovati in (Li, 1993), (Rathod, Hiremat, 1998), (Rathod, Govinda Rao, 1998), (Sheynin, Tuzikov, 2001), (Tuzikov *et al.*, 2001).
Peraltro l'utilità dei momenti geometrici, sebbene con nomenclature diverse (Preparata, Shamos, 1985) può essere riscontrata in svariati settori dell'ingegneria quali CAD/CAE/CAM (Shah, Mäntylä, 1995), robotica (Mason, 2001) e modellazione solida (Mäntylä, 1988).
Solitamente, il calcolo dei momenti viene basato su decomposizione degli oggetti in tetraedri e sulla loro rappresentazione in termini di coordinate parametriche tipiche della tessellatura solida (George, Borouchaki, 1998) metodo, quest'ultimo, tipicamente impiegato nei modelli digitali del terreno (Burrough, McDonnell, 1998). In tal senso esse sono poco adatte alla tecnica BREP (Boundary REPresentation) usualmente adottata nella modellazione solida (Mäntylä, 1988) per rappresentare gli oggetti solidi mediante poliedri caratterizzati da facce e cicli di lati *co*-incidenti (*co*-lati) .
In un lavoro precedente (D'Urso, 2004) è stata dimostrata una formula, basata sul teorema di Gauss-Green, che consente di calcolare il momento geometrico di qualsiasi ordine di oggetti solidi arbitrari attraverso integrali di superficie. Tale formula, specializzata ulteriormente al caso di poliedri, contiene tuttavia alcune espressioni che sono state riportate senza dimostrazione sicchè scopo del

presente lavoro è, per l'appunto, quello di fornire la dimostrazione esplicita di tali relazioni nonché di illustrare l'approccio utilizzato per derivare la formula che fornisce i momenti di ordine 2 in funzione esplicita delle coordinate dei vertici dell'oggetto solido supposto poliedrale. Si riporta infine, senza dimostrazione per motivi di spazio, la formula relativa ai momenti di ordine 3.

Espressione generale dei momenti geometrici di poliedri

Sia Ω un dominio regolare dello spazio e $\mathbf{p}$ il raggio vettore che individua la posizione di un generico punto di Ω. Detti p, q e r tre interi positivi e posto $t = p + q + r$, con t=[0, 1, …], si è mostrato in (D'Urso, 2004) che il generico momento di ordine pqr, definito da:

$$m_{pqr} = \int_\Omega x^p y^q z^r dV, \qquad [1]$$

è costituito dalla componente generica del tensore di ordine t:

$$\mathbf{M}_t = \int_\Omega \underbrace{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \ldots \otimes \mathbf{p}}_{t \text{ volte}} dV, \qquad [2]$$

dove il simbolo $\otimes$ denota il prodotto tensoriale, o diadico, tra vettori (Zund, 1994).

Il calcolo dell'integrale precedente si semplifica notevolmente in quanto, utilizzando il teorema di Gauss-Green, risulta (D'Urso, 2004):

$$\mathbf{M}_t = \int_\Omega \underbrace{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \ldots \otimes \mathbf{p}}_{t \text{ volte}} dV = \frac{1}{d+t} \int_{Fr(\Omega)} \underbrace{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \ldots \otimes \mathbf{p})}_{t \text{ volte}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\, dA, \qquad [3]$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore della normale (uscente) alla frontiera $Fr(\Omega)$ che delimita il dominio Ω e d è la dimensione dello spazio cui appartiene Ω, d=3 nel caso in esame.

Nel caso di solidi poliedrali la formula [3] si semplifica ulteriormente in quanto l'integrale di superficie a secondo membro si può esprimere in funzione delle sole coordinate dei vertici del poliedro. In particolare, detto F il numero delle facce del poliedro, F^i il dominio occupato dalla faccia i-esima, $\mathbf{n}^i$ la relativa normale e $\mathbf{p}^i$ il raggio vettore appartenente al piano individuato dalla faccia F^i, la formula [3] si specializza ulteriormente come segue:

$$\mathbf{M}_t = \frac{1}{3+t} \int_{Fr(\Omega)} \underbrace{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \ldots \otimes \mathbf{p})}_{t \text{ volte}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\, dA = \frac{1}{3+t} \sum_{i=1}^{F} \int_{F^i} \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^i \otimes \ldots \otimes \mathbf{p}^i (\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{n}^i) dA^i \,, \qquad [4]$$

Per valutare l'integrale superficiale a secondo membro della formula precedente conviene rappresentare il vettore $\mathbf{p}^i$ nella forma:

$$\mathbf{p}^i = \lambda^i \mathbf{u}^i + \mu^i \mathbf{v}^i + \delta^i \mathbf{n}^i = \mathbf{P}^i \mathbf{r}^i + \mathbf{p}^{i\perp} = \begin{bmatrix} u_1^i & v_1^i \\ u_2^i & v_2^i \\ u_3^i & v_3^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^i \\ \mu^i \end{bmatrix} + \mathbf{p}^{i\perp} \qquad [5]$$

dove $\mathbf{u}^i$ e $\mathbf{v}^i$ sono versori paralleli al piano della faccia F^i e tali da formare con il versore $\mathbf{n}^i$ una terna levogira mentre si è indicato con $\mathbf{p}^{i\perp}$ il vettore che unisce l'origine del sistema di riferimento con la proiezione ortogonale di quest'ultima sulla faccia i-esima.

Si noti che le quantità λ^i, μ^i rappresentano le coordinate della proiezione di $\mathbf{p}^i$ nel piano della faccia F^i e quindi le variabili rispetto a cui eseguire l'integrazione nella formula [4]. In tal modo, l'applicazione della formula [4] al momento di ordine 0 fornisce:

$$\mathbf{M}_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{F} \int_{F^i} (\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{n}^i) dA^i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{F} (\mathbf{p}^{i\perp} \cdot \mathbf{n}^i) \int_{F^i} dA^i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{F} (\mathbf{p}^{i\perp} \cdot \mathbf{n}^i) \sum_{j=1}^{V^i} \mathbf{r}_j^i \cdot (\mathbf{r}_{j+1}^i)^\perp, \qquad [6]$$

in quanto, essendo il prodotto scalare $\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{n}^i$ costante per la faccia, si è posto $\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{n}^i = \mathbf{p}^{i\perp} \cdot \mathbf{n}^i$.

Inoltre, si è indicato con V^i il numero di vertici della faccia *i*-esima.

La generica quantità $\mathbf{r}_j^i$ contenuta nella formula precedente rappresenta, quindi, la posizione del vertice *j* della faccia *i* nel sistema di riferimento piano avente per origine la proiezione ortogonale dell'origine del sistema tridimensionale sulla faccia *i*. Dunque, la valutazione del prodotto $\mathbf{r}_j^i \cdot (\mathbf{r}_{j+1}^i)^{\perp}$ risulterebbe eccessivamente laboriosa se espressa in funzione delle componenti (bidimensionali) dei fattori poiché queste dovrebbero comunque ricavarsi dalle componenti (tridimensionali) dei corrispondenti vettori $\mathbf{p}_j^i$ e $\mathbf{p}_{j+1}^i$. Per tale motivo, nella sezione successiva, si dimostrerà il seguente risultato:

$$\mathbf{r}_j^i \cdot (\mathbf{r}_{j+1}^i)^{\perp} = c_j^i = (\mathbf{p}_j^i \times \mathbf{p}_{j+1}^i) \cdot \mathbf{n}^i, \qquad [7]$$

già utilizzato in (D'Urso, 2004).

Alcuni richiami di calcolo vettoriale e tensoriale

Per illustrare la tecnica impiegata per dimostrare la [7] è opportuno premettere alcuni risultati che verranno richiamati nel seguito. Assegnati i vettori **a**, **b**, **c** e **d**, si può mostrare che risulta:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{d}), \qquad [8]$$

in cui, con abuso di notazione, si è utilizzato lo stesso simbolo per denotare, a primo membro, il prodotto scalare tra vettori e, nel secondo, il prodotto scalare tra tensori del secondo ordine. In particolare, detti **A** e **B** due tensori siffatti e $\mathbf{A}_{ij}$ e $\mathbf{B}_{ij}$ le relative componenti cartesiane, risulta $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$ in cui si è adottata la convenzione degli indici ripetuti.

Indicando con $\mathbf{A}^t$ il trasposto di un generico tensore **A** e cioè quello che verifica l'uguaglianza:

$$\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^t \mathbf{b},$$

con **a** e **b** vettori arbitrari, si definisce simmetrico un tensore per il quale $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ ed emisimmetrico uno per il quale risulti $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$.

Ebbene, è sempre possibile decomporre additivamente, ed in modo univoco, un tensore arbitrario **A** in una parte simmetrica (sim **A**) ed una emisimmetrica (emi **A**) definite da:

$$\text{sim}\, \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^t}{2} \qquad \text{emi}\, \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^t}{2},$$

risultando, banalmente, **A** = sim **A** + emi **A**. E' infatti facile dimostrare, poiché $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$, che $(\text{sim}\, \mathbf{A})^t = \text{sim}\, \mathbf{A}$ e che $(\text{emi}\, \mathbf{A})^t = -\, \text{emi}\, \mathbf{A}$.

Si consideri ora il prodotto scalare tra un tensore emisimmetrico **W** ed uno arbitrario **A**. Risulta

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{W} \cdot (\text{sim}\, \mathbf{A} + \text{emi}\, \mathbf{A}) = \mathbf{W} \cdot \text{emi}\, \mathbf{A}, \qquad [9]$$

in quanto il prodotto scalare tra un tensore simmetrico ed uno emisimmetrico è nullo. Per convincersene è sufficiente mostrare che, in una base cartesiana tridimensionale, le matrici associate ad un tensore emisimmetrico **W** ed uno simmetrico **A** sono fornite da:

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix},$$

e che la definizione di prodotto scalare tra tensori richiamata in precedenza equivale per l'appunto ad eseguire la somma dei prodotti delle componenti omonime delle matrici associate ai tensori stessi.

Si noti che le componenti delle matrici associate a **W** sono state volutamente indicate con un solo indice per enfatizzare il fatto che un generico tensore emisimmetrico è univocamente individuato da

3 sole componenti; esse definiscono il cosiddetto vettore assiale associato a **W**:

$$[\mathbf{w}]^{\mathrm{t}} = [\mathrm{w}_{\mathrm{x}} \;\; \mathrm{w}_{\mathrm{y}} \;\; \mathrm{w}_{\mathrm{z}}]^{\mathrm{t}} = \mathrm{axial}\,\mathbf{W},$$

In particolare, ricordando che:

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix},$$

è possibile mostrare che:

$$-\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathrm{axial}\,(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \qquad [10]$$

in cui $\times$ indica il prodotto vettoriale e la emisimmetria del tensore a secondo membro consegue dalla proprietà generale $(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})^{\mathrm{t}} = (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c})$, anch'essa di verifica immediata.
Infine, siano $\mathbf{W_a}$ e $\mathbf{W_b}$ i tensori emisimmetrici associati ad **a** e **b** rispettivamente. Si verifica allora l'ulteriore proprietà:

$$\mathbf{W_a} \cdot \mathbf{W_b} = 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \qquad [11]$$

di grande utilità nel seguito.

Espressione del prodotto $\mathbf{r}_j^i \cdot (\mathbf{r}_{j+1}^i)^{\perp}$ in funzione delle coordinate dei vertici del poliedro

In base alla definizione dei vettori $\mathbf{r}_j^i$ risulta:

$$\mathbf{r}_j^i = \begin{bmatrix} \lambda_j^i \\ \mu_j^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_j^i \cdot \mathbf{u}^i \\ \mathbf{p}_j^i \cdot \mathbf{v}^i \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{r}_{j+1}^i)^{\perp} = \begin{bmatrix} \mu_{j+1}^i \\ -\lambda_{j+1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{j+1}^i \cdot \mathbf{v}^i \\ -\mathbf{p}_{j+1}^i \cdot \mathbf{u}^i \end{bmatrix},$$

in cui $\mathbf{p}_k^i$ denota il raggio vettore del vertice *k* della faccia *i* e si è supposto che i vertici della faccia *i*-esima siano numerati consecutivamente in modo da percorrere la relativa frontiera in verso antiorario rispetto a $\mathbf{n}^i$. In base alla definizione precedente consegue dalle [8] e [9] che:

$$\begin{aligned} c_j^i = \mathbf{r}_j^i \cdot (\mathbf{r}_{j+1}^i)^{\perp} &= (\mathbf{p}_j^i \cdot \mathbf{u}^i)(\mathbf{p}_{j+1}^i \cdot \mathbf{v}^i) - (\mathbf{p}_j^i \cdot \mathbf{v}^i)(\mathbf{p}_{j+1}^i \cdot \mathbf{u}^i) = \\ &= (\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i) \cdot (\mathbf{u}^i \otimes \mathbf{v}^i) - (\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i) \cdot (\mathbf{v}^i \otimes \mathbf{u}^i) = \\ &= (\mathbf{u}^i \otimes \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{u}^i) \cdot (\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i) = \\ &= (\mathbf{u}^i \otimes \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{u}^i) \cdot (\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i - \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i)/2 \end{aligned} \qquad [12]$$

Pertanto, in base alle [10] e [11] si può scrivere:

$$\mathbf{r}_j^i \cdot (\mathbf{r}_{j+1}^i)^{\perp} = 2(-\mathbf{u}^i \times \mathbf{v}^i) \cdot (-\mathbf{p}_j^i \times \mathbf{p}_{j+1}^i)/2 = (\mathbf{p}_j^i \times \mathbf{p}_{j+1}^i) \cdot \mathbf{n}^i$$

essendo, per definizione, $\mathbf{n}^i = \mathbf{u}^i \times \mathbf{v}^i$, sicchè il risultato finale è dimostrato

Formule esplicite per il calcolo di momenti di ordine 2 e 3 di poliedri

L'utilità della formula [12] risiede nel fatto che la quantità c_j^i compare in tutte le espressioni dei momenti. Ciò è stato mostrato nella [6] per il momento di ordine 0 ed in (D'Urso, 2004) per quello di ordine 1. Si vuole ora procedere alla dimostrazione della formula relativa al momento $\mathbf{M}_2$ poiché essa richiede alcuni artifizi che sono indispensabili per la dimostrazione delle formule relative ai momenti di ordine superiore. In particolare la formula che si vuole dimostrare è la seguente:

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{F}\int_{F^i}(\mathbf{p}^i\cdot\mathbf{n}^i)\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{F}(\mathbf{p}^{i\perp}\cdot\mathbf{n}^i)\int_{F^i}\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i,$$

dove:

$$\begin{aligned}\int_{F^i}\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\Big[&\mathbf{p}_j^i\otimes\mathbf{p}_j^i + \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_j^i\otimes\mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}_{j+1}^i\otimes\mathbf{p}_j^i\right) + \mathbf{p}_{j+1}^i\otimes\mathbf{p}_{j+1}^i + \\ &+\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_j^i\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}_j^i\right) + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \\ &+\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_{j+1}^i\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}_{j+1}^i\right)\Big].\end{aligned}$$

Per derivare quest'ultima formula si procede come segue; invocando la [5] risulta

$$\int_{F^i}\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i = \int_{F^i}(\mathbf{P}^i\mathbf{r}^i\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}^i + \mathbf{P}^i\mathbf{r}^i\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}^i + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}^{i\perp})dA^i,$$

sicchè si è ricondotti al calcolo di momenti $\mathbf{M}_i^p$ di figure poligonali la cui espressione, riferita alla faccia *i*-esima, è (D'Urso, 2003):

$$\mathbf{M}_0^p = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i \qquad \mathbf{M}_1^p = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\left[\mathbf{r}_j^i + \mathbf{r}_{j+1}^i\right]$$

$$\mathbf{M}_2^p = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\left[\mathbf{r}_j^i\otimes\mathbf{r}_j^i + \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_j^i\otimes\mathbf{r}_{j+1}^i + \mathbf{r}_{j+1}^i\otimes\mathbf{r}_j^i\right) + \mathbf{r}_{j+1}^i\otimes\mathbf{r}_{j+1}^i\right].$$

Risulta così:

$$\begin{aligned}\int_{F^i}\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\Big\{&\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i + \frac{1}{2}\left[\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i + \mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i\right] + \\ &+\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\Big\} + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\left\{\left[\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i + \mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\right]\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \right. \\ &\left.+\mathbf{p}^{i\perp}\otimes\left[\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i + \mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\right]\right\} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\left[\mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}^{i\perp}\right]\end{aligned}$$

Aggiungendo e sottraendo $\mathbf{p}^{i\perp}$ ai vettori $\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i$ e $\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i$ contenuti nella prima parentesi quadra e raggruppando i termini omologhi si ha, in virtù della [5]:

$$\begin{aligned}\int_{F^i}\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\Big\{&\mathbf{p}_j^i\otimes\mathbf{p}_j^i + \frac{1}{2}\left[\mathbf{p}_j^i\otimes\mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}_{j+1}^i\otimes\mathbf{p}_j^i\right] + \mathbf{p}_{j+1}^i\otimes\mathbf{p}_{j+1}^i + \\ &+\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\otimes\mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i\right) + \\ &-3\,\mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}^{i\perp}\Big\} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{V^i} c_j^i\left[\mathbf{p}^{i\perp}\otimes\mathbf{p}^{i\perp}\right]\end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso artifizio di cui sopra per i vettori $\mathbf{P}^i\mathbf{r}_j^i$ e $\mathbf{P}^i\mathbf{r}_{j+1}^i$ nelle parentesi tonde si ha infine il risultato. Infine, si riporta, senza dimostrazione per ragioni di spazio, la formula relativa al momento di ordine 3:

$$\mathbf{M}_3 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{F}\int_{F^i}(\mathbf{p}^i\cdot\mathbf{n}^i)\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{F}(\mathbf{p}^{i\perp}\cdot\mathbf{n}^i)\int_{F^i}\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i\otimes\mathbf{p}^i dA^i,$$

dove:

$$\int_{F^i} \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^i dA^i = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{V^i} c_j^i \Big\{ \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_j^i + \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}^{i\perp} +$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i + \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_j^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_j^i + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_j^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[\mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_j^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[\mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{6}\Big[\mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \Big] +$$
$$+ \frac{1}{6}\Big[\mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} + \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_j^i + \mathbf{p}^{i\perp} \otimes \mathbf{p}_{j+1}^i \otimes \mathbf{p}_j^i \Big] \Big\}$$

Nonostante l'espressione sia inevitabilmente complessa, è significativo apprezzarne la perfetta simmetria.

Bibliografia

Burrough P. A., McDonnell R.A. (1998). *Principles of Geographical Information Systems, New Edition.* Oxford University Press.

D'Urso M.G. (2003), "Sul calcolo dei momenti geometrici di figure poligonali", *Atti della VII Conferenza Nazionale ASITA*, Verona.

D'Urso M.G. (2004), "Una formula per la valutazione dei momenti geometrici di poliedri", *Atti della VIII Conferenza Nazionale ASITA*, Roma.

George P.L., Borouchaki H. (1998), *Delaunay Triangulation and Meshing*, Hermes.

Gonzales L., Woods R. (2002), *Digital Image Processing*, 2nd ed., Prentice Hall.

Mäntylä M. (1988), *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press.

Li B.C. (1993), "The moment calculation of polyhedra", *Pattern Recognition*, 26: 1229-1233.

Mason M.T. (2001), *Mechanics of Robotic Manipulation*, MIT press.

Mukundan R., Ramakrishnan K.R. (1998), *Moment Functions in Image Analysis - Theory and Applications*, World Scientific.

Preparata S., Shamos M.I. (1985), *Computational Geometry: an introduction*, Springer.

Rathod H.T., Hiremat S.V. (1998), Boundary integration of polynomials over an arbitrary linear tetrahedron in Euclidean three-dimensional space. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 153, 81-106.

Rathod H.T., Govinda Rao H.S. (1998), Integration of trivariate polynomials over linear polyhedra in Euclidean three-dimensional space. *J. Austral. Math. Soc. ser. B*, 39, 355-385.

Shah J.J., Mäntylä M. (1995), *Parametric and Feature-Based CAD/CAM: Concepts, Techniques, and Applications.* Wiley.

Sheynin A.S., Tuzikov A.V. (2001), "Explicit formulae for polyhedra moments", *Pattern Recognition Letters*, 22: 1103-1109.

Tuzikov A.V., Sheynin A.S., Vasiliev P.V. (2001), "Efficient computation of body moments", In

Zund J. (1994), *Foundations of Differential Geodesy*, Springer.