

NETLAB: un laboratorio numerico per reti 3D classiche e GPS.

Fernando SANSONI(*), Giovanna VENUTI(**)

(*)DIAR – Politecnico di Milano – Polo regionale di Como, via Valleggio 11, 22100 Como, tel 0313327518, fax 0313327519, fernando.sanso@polimi.it

(**)DIAR – Politecnico di Milano – Polo regionale di Como, via Valleggio 11, 22100 Como, tel 0313327527, fax 0313327527, giovanna.venuti@polimi.it

Riassunto

Il lavoro che presentiamo ha prevalente valenza didattica e mira a precisare i concetti di posizionamento 3D in sistemi di riferimento e coordinate globali, come diventa sempre più necessario quando si mescolino osservazioni classiche e osservazioni GPS. La trattazione qui presentata è sintetica e limitata mentre una descrizione più approfondita ad un altro lavoro. Il *software*, sempre per ragioni didattiche, è sviluppato in ambiente MATLAB e per il momento è solo un prototipo.

Abstract

The work here presented has mostly a didactic target. It aims at clarifying the concepts of 3D positioning in a global reference frame endowed with a global coordinate system. This in fact has become more and more important due to mixing classical and GPS surveyed networks. What we present here is just an outline of the software, while a more detailed presentation will be done in a different paper. The software has been developed in a MATLAB environment for didactic reasons; at the moment it is only a prototype.

La posizione di punti in un sistema geodetico.

La determinazione della posizione di punti a partire da misure topografiche classiche e GPS può essere utilmente fatta in un opportuno sistema di coordinate geodetiche che qui considereremo solo inquadrato in un sistema Geodetico Globale (GG). Tale determinazione richiede la conoscenza di un modello del campo della gravità che fornisca la differenza tra la direzione della verticale, alla quale sono riferite le osservazioni, e la direzione della normale all'ellissoide di riferimento, utilizzata nei calcoli di compensazione delle osservazioni stesse (deviazione della verticale). Per la compensazione delle misure ai minimi quadrati è necessaria la scrittura delle equazioni di osservazione, che collegano le misure alle coordinate incognite, quindi la loro linearizzazione intorno a valori approssimati delle incognite stesse, seguita dalla stima iterativa delle correzioni dei valori approssimati e della loro precisione. Nel seguito, a partire dalle equazioni di osservazione vettoriali linearizzate della distanza, dell'angolo zenitale, della direzione azimutale e di una base GPS, esprimendo le posizioni dei punti in un sistema cartesiano geocentrico e utilizzando un sistema di coordinate ellissoidiche, scriveremo le stesse equazioni nelle incognite "incrementi delle posizioni", espresse in termini di incrementi di latitudine, longitudine e altezza ellissoidica, e correzioni degli angoli di orientamento delle stazioni. Concludiamo con un primo esempio di compensazione delle sole osservazioni classiche nel caso semplice di una rete costituita da tre vertici, in cui uno ha posizione nota e un secondo ha longitudine nota allo scopo di fissare il sistema di riferimento.

Coordinate geodetiche e differenziale di un punto in coordinate geodetiche

Ricordiamo che le componenti cartesiane di un vettore posizione in un sistema globale geocentrico, in coordinate geodetiche, sono data da

$$\underline{r}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_i + h_i) \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ (N_i + h_i) \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ [N_i (1 - e^2)] \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad [1]$$

dove: $N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}}$, a è il semiasse maggiore dell'ellissoide di riferimento, e^2 l'eccentricità.

Differenziando il vettore di posizione di un punto i , $\underline{r}_i = X_i \underline{e}_X + Y_i \underline{e}_Y + Z_i \underline{e}_Z$, si ottiene il differenziale della posizione in coordinate geodetiche:

$$d\underline{r}_i = (N_i + h_i) \cos \varphi_i \underline{e}_{\lambda_i} d\lambda_i + (M_i + h_i) \underline{e}_{\varphi_i} d\varphi_i + \underline{v}_i dh_i \quad [2]$$

dove $M_i = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i)^{\frac{3}{2}}} = \frac{N_i(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}$, mentre $(\underline{e}_{\varphi_i}, \underline{e}_{\lambda_i}, \underline{v}_i)$ è la terna di vettori ortonormali del sistema cartesiano locale nel punto i , le cui componenti nel sistema cartesiano geocentrico sono:

$$\underline{e}_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda_i \\ \cos \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i \\ -\sin \varphi_i \sin \lambda_i \\ \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \underline{v}_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad [3]$$

Equazione alla distanza.

L'equazione vettoriale della distanza, in cui \underline{r}_i è il vettore di posizione, è

$$D_{ij} = |\underline{r}_{ij}| = |\underline{r}_j - \underline{r}_i| = \sqrt{\underline{r}_{ij} \cdot \underline{r}_{ij}}; \quad [4]$$

e la corrispondente equazione linearizzata è data da:

$$D_{ij} \cong \tilde{D}_{ij} + dD_{ij} = \tilde{D}_{ij} + d|\underline{r}_{ij}| = \tilde{D}_{ij} + \tilde{\underline{e}}_{ij} \cdot (d\underline{r}_{ij}) = \tilde{D}_{ij} + \tilde{\underline{e}}_{ij} \cdot (d\underline{r}_j - d\underline{r}_i). \quad [5]$$

dove $\underline{e}_{ij} = \frac{\underline{r}_{ij}}{|\underline{r}_{ij}|}$, mentre la distanza approssimata \tilde{D}_{ij} si calcola dalla [4] utilizzando le coordinate

approssimate dei punti i e j . Di seguito contrassegneremo i valori approssimati delle variabili con il simbolo \sim , il prodotto scalare tra vettori è espresso con il punto quando i vettori sono espressi in forma intrinseca, con il simbolo di trasposto quando si introduce un sistema di riferimento e i vettori sono rappresentati tramite le loro componenti in tale sistema.

In coordinate geodetiche, il differenziale della distanza diventa:

$$\begin{aligned} dD_{ij} = & -\tilde{\underline{e}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\varphi_i} (\tilde{M}_i + \tilde{h}_i) d\varphi_i - \tilde{\underline{e}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\lambda_i} (\tilde{N}_i + \tilde{h}_i) \cos \tilde{\varphi}_i d\lambda_i - \tilde{\underline{e}}_{ij}^+ \tilde{\underline{v}}_i dh_i + \\ & + \tilde{\underline{e}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\varphi_j} (\tilde{M}_j + \tilde{h}_j) d\varphi_j + \tilde{\underline{e}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\lambda_j} (\tilde{N}_j + \tilde{h}_j) \cos \tilde{\varphi}_j d\lambda_j + \tilde{\underline{e}}_{ij}^+ \tilde{\underline{v}}_j dh_j \end{aligned} \quad [6]$$

Equazione all'angolo zenitale.

L'equazione vettoriale dell'angolo zenitale, con riferimento alla Figura 1, è':

$$\zeta_{ij} = \arccos(\underline{n}_i \cdot \underline{e}_{ij}) \quad [7]$$

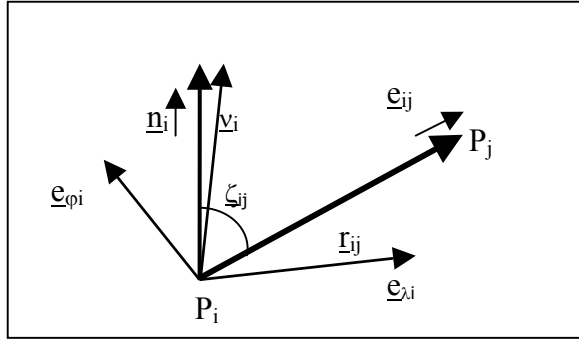


Figura 1 – Angolo zenitale

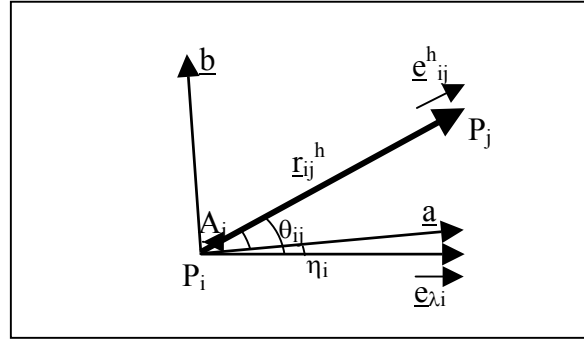


Figura 2 – Direzione azimutale

dove \underline{n}_i è la direzione della verticale in un punto i , data dalla somma della direzione della normale all'ellissoide in i (cfr. equazione [3]) e della deviazione della verticale in i , considerata nota e calcolata sulla base del modello di geoidi, $\underline{n}_i = \underline{v}_i + \underline{\delta}_i$. Dalla [7] è possibile calcolare il valore approssimato $\tilde{\zeta}_{ij}$ dell'angolo zenitale, a partire dalle coordinate approssimate dei punti i e j . L'equazione linearizzata dell'angolo zenitale in forma vettoriale è dunque:

$$\zeta_{ij} \cong \tilde{\zeta}_{ij} + d\zeta_{ij} = \tilde{\zeta}_{ij} + d\zeta_{ij} = \tilde{\zeta}_{ij} - \frac{1}{\sin(\tilde{\zeta}_{ij}) \tilde{D}_{ij}} [\tilde{\underline{v}}_i - (\tilde{\underline{v}}_i \cdot \tilde{\underline{e}}_{ij}) \tilde{\underline{e}}_{ij}] \cdot (d\underline{r}_j - d\underline{r}_i) \quad [8]$$

Posto $\tilde{\underline{z}}_{ij} = -\frac{1}{\sin(\tilde{\zeta}_{ij}) \tilde{D}_{ij}} [\tilde{\underline{v}}_i - (\tilde{\underline{v}}_i \cdot \tilde{\underline{e}}_{ij}) \tilde{\underline{e}}_{ij}]$, il differenziale dell'angolo zenitale in coordinate ellissoidiche è dato da:

$$d\zeta_{ij} = \tilde{\underline{z}}_{ij} \cdot (d\underline{r}_j - d\underline{r}_i) = -\tilde{\underline{z}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\varphi_i} (\tilde{M}_i + \tilde{h}_i) d\varphi_i - \tilde{\underline{z}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\lambda_i} (\tilde{N}_i + \tilde{h}_i) \cos \tilde{\varphi}_i d\lambda_i - \tilde{\underline{z}}_{ij}^+ \tilde{v}_i dh_i + \tilde{\underline{z}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\varphi_j} (\tilde{M}_j + \tilde{h}_j) d\varphi_j + \tilde{\underline{z}}_{ij}^+ \tilde{\underline{e}}_{\lambda_j} (\tilde{N}_j + \tilde{h}_j) \cos \tilde{\varphi}_j d\lambda_j + \tilde{\underline{z}}_{ij}^+ \tilde{v}_j dh_j \quad [9]$$

Equazione alla direzione azimutale

L'equazione vettoriale della direzione azimutale, con riferimento alla Figura 2, è data da:

$$A_{ij} = \arctan\left(\frac{\underline{r}_{ij}^h \cdot \underline{b}_i}{\underline{r}_{ij}^h \cdot \underline{a}_i}\right) = \arctan\left(\frac{\underline{r}_{ij} \cdot \underline{b}_i}{\underline{r}_{ij} \cdot \underline{a}_i}\right) \quad [10],$$

dove \underline{a}_i e \underline{b}_i sono, rispettivamente, il versore della direzione dello zero del cerchio azimutale e il versore a questo ortogonale; tali versori giacciono sul piano orizzontale in i ; r_{ij}^h e' la proiezione di r_{ij} su tale piano.

Noto $\tilde{\beta}_i$, angolo approssimato di orientamento della stazione, ricavato da un'osservazione, il valore approssimato della direzione azimutale si calcola come:

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{\theta}_{ij} - \tilde{\beta}_i = \arctan\left(\frac{\tilde{\underline{r}}_{ij} \cdot \tilde{\underline{e}}_{\varphi}}{\tilde{\underline{r}}_{ij} \cdot \tilde{\underline{e}}_{\lambda}}\right) - \tilde{\beta}_i \quad [11]$$

e l'equazione della direzione azimutale linearizzata e' data da:

$$A_{ij} \cong \tilde{A}_{ij} + dA_{ij} = \tilde{A}_{ij} + dA_{ij} = \tilde{A}_{ij} - d\eta_j + \frac{1}{(\tilde{D}_{ij})^2 \sin^2 \tilde{\zeta}_{ij}} [(\tilde{\underline{r}}_{ij} \cdot \tilde{\underline{a}}_i) \tilde{\underline{b}}_i - (\tilde{\underline{r}}_{ij} \cdot \tilde{\underline{b}}_i) \tilde{\underline{a}}_i] \cdot d\underline{r}_{ij} \quad [12]$$

dove $\tilde{\mathbf{a}}_i = \cos \tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{e}}_{\lambda_i} + \sin \tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{e}}_{\varphi_i}$, $\tilde{\mathbf{b}}_i = -\sin \tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{e}}_{\lambda_i} + \cos \tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{e}}_{\varphi_i}$, si considerano, in forma approssimata, come giacenti sul piano ortogonale alla direzione della normale all'ellissoide.

Posto $\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{1}{(\tilde{D}_{ij})^2 \sin^2 \tilde{\zeta}_{ij}} \left[(\tilde{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i) \tilde{\mathbf{b}}_i - (\tilde{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{b}}_i) \tilde{\mathbf{a}}_i \right]$, il differenziale della direzione azimutale in coordinate ellissoidiche e' dato da:

$$dA_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = -\tilde{\alpha}_{ij}^+ \tilde{\mathbf{e}}_{\varphi_i} (\tilde{M}_i + \tilde{h}_i) d\varphi_i - \tilde{\alpha}_{ij}^+ \tilde{\mathbf{e}}_{\lambda_i} (\tilde{N}_i + \tilde{h}_i) \cos \tilde{\varphi}_i d\lambda_i - \tilde{\zeta}_{ij}^+ \tilde{\mathbf{v}}_i dh_i + \tilde{\alpha}_{ij}^+ \tilde{\mathbf{e}}_{\varphi_j} (\tilde{M}_j + \tilde{h}_j) d\varphi_j + \tilde{\alpha}_{ij}^+ \tilde{\mathbf{e}}_{\lambda_j} (\tilde{N}_j + \tilde{h}_j) \cos \tilde{\varphi}_j d\lambda_j + \tilde{\alpha}_{ij}^+ \tilde{\mathbf{v}}_j dh_j \quad [13]$$

Equazione di una base GPS

Poiché l'uso del GPS per il posizionamento relativo di due punti i e j, basato sulle differenze di codice e di fase, permette la stima diretta del vettore \mathbf{r}_{ij} , possiamo scrivere:

$$\mathbf{b}_{ij}^G = \mathbf{r}_{ij} \quad [14],$$

che, linearizzata e espressa in coordinate geodetiche, diventa:

$$\mathbf{b}_{ij} \cong \tilde{\mathbf{r}}_{ij} + d\mathbf{r}_{ij} = \tilde{\mathbf{r}}_{ij} + d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i = \tilde{\mathbf{r}}_{ij} + (N_j + h_j) \cos \varphi_j \mathbf{e}_{\lambda_j} d\lambda_j + (M_j + h_j) \mathbf{e}_{\varphi_j} d\varphi_j + \mathbf{v}_j dh_j + -(N_i + h_i) \cos \varphi_i \mathbf{e}_{\lambda_i} d\lambda_i - (M_i + h_i) \mathbf{e}_{\varphi_i} d\varphi_i - \mathbf{v}_i dh_i \quad [15]$$

E' utile osservare che, mentre nelle misure classiche ogni singola osservazione dà luogo a una equazione scalare che potrà essere considerata, seppure in modo approssimato, indipendente dalle altre, così non può essere per le 3 equazioni scalari contenute nella [15], i cui errori di stima risultano necessariamente correlati tra loro, con una matrice di covarianza nota dalla precedente elaborazione delle osservazioni GPS, da cui la base \mathbf{b}_{ij}^G è stimata.

Esempio

In questo primo esempio abbiamo simulato il rilevamento di un triangolo, a partire da coordinate realistiche di tre punti sui monti comaschi, con l'esecuzione di tutte le possibili osservazioni classiche di una total station. Si suppone che di un punto P₁ (Como, via Valleggio, sede di una stazione GPS permanente) siano note le coordinate geocentriche $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)$, mentre per un secondo punto P₂ (Como Brunate) sia nota la longitudine λ . Le osservazioni simulate sono riportate in Tabella 1:

Dalla Stazione P1, fissa:	Dalla Stazione P2:	Dalla Stazione P3:
$D_{12}^o = 1915.089 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$	$D_{21}^o = 1915.101 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$	$D_{31}^o = 2851.960 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$
$D_{13}^o = 2851.914 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$	$D_{23}^o = 3200.903 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$	$D_{32}^o = 3200.992 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$
$\zeta_{12}^o = 84.6428^g \pm 0.0030^g$	$\zeta_{21}^o = 115.3775^g \pm 0.0030^g$	$\zeta_{31}^o = 105.3205^g \pm 0.0030^g$
$\zeta_{13}^o = 94.7059^g \pm 0.0030^g$	$\zeta_{23}^o = 104.3911^g \pm 0.0030^g$	$\zeta_{32}^o = 95.6373^g \pm 0.0030^g$
$A_{12}^o = 98.8944^g \pm 0.0006^g$	$A_{21}^o = 298.8948^g \pm 0.0006^g$	$A_{31}^o = 390.8431^g \pm 0.0006^g$
$A_{13}^o = 190.8139^g \pm 0.0006^g$	$A_{23}^o = 230.0200^g \pm 0.0006^g$	$A_{32}^o = 30.0491^g \pm 0.0006^g$

. Tabella 1 – Osservazioni simulate con relative precisioni

Le coordinate dei vertici della rete sono riportate in Tabella 2 (le coordinate approssimate sono contrassegnate dal simbolo ~) insieme ai valori approssimati di orientamento:

P1-Stazione Como Via Valleggio	P2-Stazione Como Brunate	P3-Stazione Como Monte Croce
$\varphi_1 = 45^\circ 48' 07.78492''$ N	$\tilde{\varphi}_2 = 45^\circ 49' 08''$ N	$\tilde{\varphi}_3 = 45^\circ 48' 21''$ N
$\lambda_1 = 9^\circ 05' 44.23673''$ E	$\lambda_2 = 9^\circ 05' 45.73205''$ E	$\tilde{\lambda}_3 = 9^\circ 03' 34''$ E
$h_1 = 292.302$ m	$\tilde{h}_2 = 750$ m	$\tilde{h}_3 = 530$ m
$\tilde{\beta}_1 = 0^g$	$\tilde{\beta}_2 = 0^g$	$\tilde{\beta}_3 = 0^g$

. Tabella 2 – Coordinate dei vertici della rete

In Tabella 3 si riportano le coordinate compensate e le coordinate note dei vertici della rete, utilizzate per la simulazione delle osservazioni. I valori delle differenze delle coordinate latitudine e longitudine, per una maggiore leggibilità, sono state trasformate in metri, moltiplicando la latitudine in radianti per un raggio pari a quello della sfera locale in P_1 e la longitudine per $\cos(\varphi_m)R_1$ (dove φ_m è la latitudine media della rete). In tabella 4 si riportano invece gli sqm delle coordinate stimate, in secondi d'arco e in metri.

Si può notare che gli errori di stima sono compatibili con gli sqm derivati dai minimi quadrati.

Punto	Coordinate note	Coordinate compensate	Differenze	
P ₁	φ	45°48'07.78492	45°48'07.78492''	
	λ	9°05'44.23673''	9°05'44.23673''	
	h	292.302	292.302 m	
P ₂	φ	45°49'08.47893''	45°49'08.478661''	$\Delta\varphi R_1 = 0.01$ m
	λ	9°05'45.73205''	9°05'45.73205''	
	h	749.861 m	749.833 m	$\Delta h = 0.02$ m
P ₃	φ	45°48'21.4382''	45°48'21.43597''	$\Delta\varphi R_1 = 0.07$ m
	λ	9°03'34.02654''	9°03'34.02721''	$\Delta\lambda \cos(\varphi_m) R_1 = 0.01$ m
	h	531.041 m	531.017 m	$\Delta h = 0.02$ m

. Tabella 3 – Confronto tra i risultati della compensazione e le coordinate note dei vertici della rete

	σ_φ	$\sigma_\varphi R_1$	σ_λ	$\sigma_\lambda \cos(\varphi_m) R_1$	σ_h
P ₁	0.00		0.00		0.00
P ₂	7.28 10 ⁻⁴ ''	0.02 m	0.00		0.06 m
P ₃	9.93 10 ⁻⁴ ''	0.03 m	8.02 10 ⁻⁴ ''	0.02 m	0.08 m

. Tabella 4 – Precisioni delle coordinate compensate

E' bene osservare che, mentre in una rete con le sole osservazioni classiche, per il posizionamento occorre fissare φ , λ , h di un primo punto e λ di un secondo punto, bloccando così l'invarianza per traslazione e per rotazione attorno all'asse geocentrico Z; ora la determinazione diretta di vertici di base in una rete mista che includa osservazioni GPS, non presenta più la rotazione libera attorno a Z, pertanto per mantenere l'invarianza nella sola traslazione il sistema di riferimento sarà fissato da un solo punto.

Un'ultima avvertenza sullo stato attuale del software è che, affinché esso possa essere completamente operativo, si dovranno includere i termini correttivi dovuti alle trasmissioni dei vari segnali elettromagnetici in atmosfera.

Bibliografia

Awange J.L., Grafarend E.W.(2005), *Solving algebraic computational problems in Geodesy and Geoinformatics*. Springer Verlag, Berlin- Heidelberg.

Betti B., Crespi M. Sanso' F.(1989), "GPS geoide e sistemi di riferimento", *Ricerche di geodesia fotogrammetria e topografia*, 5:21-44. Edizioni CLUP Milano.

Brovelli M., Sanso' F. (1989), "Equazioni d'osservazione della topografia in coordinate cartesiane locali: scrittura, linearizzazione e analisi dei relativi ambiti di validità", *Bollettino di Geodesia e scienze affini*, 5 (no.3): 255-274.

Hofman-Wellenhof B., Moritz H. (2005), *Physical Geodesy*, Springer Verlag, New York Wien.

Inghilleri G. (1974), *Topografia generale*, UTET, Torino.

Manzino A.(2000). *Lezioni di Topografia*, Otto edizioni, Torino.