SIMMETRIE E TOPOLOGIE

Ilaria Carminati (*), Luigi Mussio (*)

(*) D.I.I.A.R.- Sez. Rilevamento, Politecnico di Milano – e-mail: luigi.mussio@polimi.it
ili.carm@virgilio.it

Sommario
Questa nota vuole presentare il mondo affascinante delle simmetrie e le sue curiose corrispondenze con gli elementi delle relazioni topologiche e geometriche fra classi di oggetti.

Abstract
This report deals with the fascinating world of the symmetries, which is in a curious correspondence with the elements of the topological and geometrical relations among classes of objects.

Introduzione
La proibizione di un'arte figurativa per gli Ebrei e per gli Arabi portò allo sviluppo di un'arte puramente astratta e geometrica, ed all'esplorazione dei possibili tipi di decorazione murale. In questo campo, il risultato più elevato fu raggiunto, a Granada nel XIV secolo, con le piastrellazioni dell'Alhambra.
Benché il numero di decorazioni murali sia pressoché illimitato, esse sono invece limitate per quanto riguarda il tipo di simmetria adottato per la loro ripetizione. Da un punto di vista matematico, le simmetrie esibite da queste decorazioni possono essere classificate in base alle possibili trasformazioni (costituenti gli elementi di gruppi di simmetrie) che lasciano invariate: traslazioni lungo una retta, riflessioni rispetto ad una retta e rotazioni attorno ad un punto.
Le simmetrie lineari, planari e spaziali sono gruppi notevoli dell'algebra formale. In esse, si evidenziano rotazioni, riflessioni e glisso – riflessioni. Con riferimento ai casi monodimensionale, bidimensionale e tridimensionale, esse presentano un numero di elementi pari a 7, 17 e 230 (ovvero 4, 10 e 32 tenendo conto della cosiddetta restrizione cristallografica). Questi numeri ed alcune corrispondenze con i numeri delle relazioni topologiche e geometriche tra elementi caratteristici della modellazione ad oggetti fanno delle simmetrie argomenti di interesse anche in geomatica.

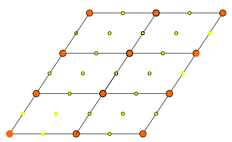
Trasformazioni e lattici
Si definisce simmetria una invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni e, qualora la trasformazione preservi la distanza, essa è chiamata isometria. Nel piano, esistono quattro tipi di isometrie: traslazione, rotazione, riflessione e glisso – riflessione. Si può notare come la rotazione possa essere evitata, sostituendola con due opportune riflessioni, come del resto la traslazione; inoltre la glisso - riflessione si può ridurre ad una riflessione, seguita da una traslazione nella stessa direzione. Pertanto si definisce simmetria geometrica un qualunque movimento che si ottenga combinando riflessioni e due figure sono dette geometricamente simmetriche (o isometriche), se è possibile passare da una all'altra mediante una simmetria geometrica.
Una volta introdotte e classificate le simmetrie, è possibile usarle per determinare il grado di simmetria di una figura: infatti una figura è tanto più simmetrica, quante più simmetrie possiede. Si definisce gruppo diedrale di ordine n, l'insieme delle simmetrie di una figura regolare, con n bracci uguali, lasciata invariata da n rotazioni ed n riflessioni. Si definisce altresì gruppo ciclico di ordine n, l'insieme delle simmetrie di una figura regolare non - stellata, con n bracci uguali, lasciata invariata da n rotazioni, ma non da alcuna riflessione. I gruppi diedrali e ciclici sono i soli insiemi di simmetrie possibili per i rosoni che ammettono solo un numero finito di simmetrie ed un centro (ossia un punto che non viene mosso da alcuna di queste simmetrie). Se invece di un solo punto rimane invariato un intero segmento, allora l'unica possibile simmetria è una riflessione.

Definizione di traslazione: una traslazione si ha se, spostando una figura lungo una certa direzione ed ad una certa distanza, essa ricade su se stessa. Le traslazioni avvengono lungo una sola direzione per le simmetrie lineari, due direzioni per quelle planari e tre direzioni per quelle spaziali.
Definizione di rotazione: una rotazione tiene fisso un punto del piano e ruota tutto il resto di un certo angolo attorno al punto stesso. Per le simmetrie considerate, l'angolo deve essere un preciso sottomultiplo di 360° e precisamente solo gli angoli pari a 180°, 120°, 90° e 60° sono considerati ammissibili. L'ordine di una rotazione è il numero di ripetizioni della rotazione scelta, per riportare la figura alla configurazione iniziale; di conseguenza, una rotazione di 60° ha ordine 6, una rotazione di 90° ha ordine 4, una rotazione di 120° ha ordine 3 ed una rotazione di 180° ha ordine 2.
Definizione di riflessione: una riflessione fissa una linea nel piano, chiamata asse di riflessione, e scambia i punti da un lato dell'asse con i punti dall'altro lato dell'asse, alla stessa distanza dall'asse (lo stesso fenomeno accade con una riflessione attraverso uno specchio).
Definizione di glisso – riflessione: una glisso – riflessione si compone di una riflessione attraverso un asse e una traslazione parallela all'asse stesso.

L'insieme delle traslazioni di un punto, attraverso le simmetrie di traslazione di un figura, forma un lattice. Si possono classificare i lattici in 5 tipi diversi.

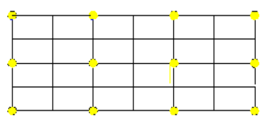
- se un lattice ha una regione fondamentale quadrata, è detto lattice quadrato;
- se un lattice ha una regione fondamentale rombica, con angoli di 60°, è detto lattice esagonale, poiché i punti più vicini a qualunque altro punto dello stesso lattice sono i vertici di un esagono regolare;
- se un lattice ha una regione fondamentale rombica, con angoli qualsiasi, è detto lattice rombico;
- se un lattice ha una regione fondamentale rettangolare, è detto lattice rettangolare;
- se un lattice ha una regione fondamentale a parallelogramma, è detto lattice a parallelogramma.

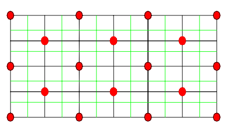
Se una composizione ha un riflessione come simmetria, il suo lattice può essere rombico, rettangolare o quadrato; se ha una rotazione di 90°, il lattice deve essere quadrato, mentre se ha una rotazione di 60° o 120°, il lattice deve essere esagonale. Si noti poi come le restrizioni, tenuto conto delle particolarità geometriche specifiche, siano ancora più severe nelle simmetrie di traslazione di un corpo dello spazio 3D.



Lattice a parallelogramma: i punti arancio indicano i punti del lattice e le linee segnano i parallelogrammi. Oltre alle traslazioni esistono simmetrie di mezzo giro. Alcune rotazioni hanno punti del lattice come punti fissi, altre hanno punti che cadono a metà tra due punti di lattice. Riassumendo un gruppo di simmetrie a lattice a parallelogramma ha traslazioni e rotazioni di 180°, ma non ha riflessioni.

Lattice rettangolare: i punti gialli indicano i punti del lattice e le linee segnano i rettangoli. Accanto alla traslazione e alla rotazione di 180°, il lattice ha anche la riflessione. I centri delle rotazioni giacciono nelle intersezioni degli assi di riflessione. Non si hanno glisso – riflessioni. Riassumendo un gruppo di simmetrie a lattice rettangolare ha traslazioni, rotazioni di 180° e riflessioni.

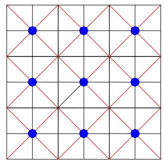




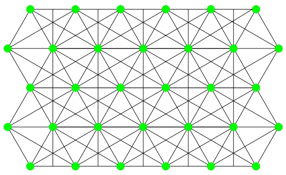
Lattice rombico: i punti rossi indicano i punti del lattice. Il lattice ha traslazioni, riflessioni e rotazioni di 180°, proprio come il lattice rettangolare, ma in aggiunta ha anche una glisso – riflessione i cui assi sono disegnati in verde.

Alcuni centri di rotazione coincidono con le intersezioni degli assi di riflessione, altri invece coincidono con le intersezioni degli assi di glisso – riflessione. Riassumendo un gruppo di simmetrie a lattice rombico ha traslazioni, rotazioni di 180°, riflessioni e glisso – riflessioni.

<ins>Lattice quadrato: i</ins> punti blu indicano i punti del lattice. Dal momento che un quadrato è sia un rombo che un rettangolo, esso ha le simmetrie tanto di quello rombico, quanto di quello rettangolare, e molti assi di riflessione e glisso – riflessione. Gli assi di riflessione sono inclinati di 45° e passano per ciascun punto del lattice; quelli di glisso – riflessione passano invece a metà tra assi paralleli di riflessione.



Oltre a numerose rotazioni di 180°, il lattice ha anche rotazioni di 90°; i loro centri coincidono con i punti del lattice oppure sono equidistanti dai quattro punti più vicini del lattice e posti dove si incontrano i quattro assi. Riassumendo un gruppo di simmetrie a lattice quadrato ha traslazioni, rotazioni di 180° e 90°, riflessioni e glisso – riflessioni.



<ins>Lattice esagonale:</ins> i punti verdi indicano i punti del lattice. Il lattice ha simmetrie di rotazione di 60°, riflessioni e glisso - riflessioni. I punti fissi di queste rotazioni sono i punti del lattice. In ogni punto di lattice, si incontrano sei assi di rotazione. Riassumendo un gruppo di simmetrie a lattice esagonale ha traslazioni, rotazioni di 60°, 120° e 180°, riflessioni e glisso – riflessioni.

Simmetrie lineari

Si chiamano simmetrie lineari quelle simmetrie che hanno una sola direzione di traslazione. Esse si distinguono in 7 gruppi, frequentemente rappresentati mediante fregi (o greche). La notazione usata per identificare i gruppi è la notazione cristallografica, dove:

- il primo simbolo è sempre una *p*;
- il secondo simbolo può essere un 1 od una *m*, ed indica la presenza (*m*) o l'assenza (1) di una riflessione ortogonale alla direzione di traslazione;
- il terzo simbolo può essere un 1, una *m* od una *a*, ed indica la presenza di una riflessione (*m*), una glisso – riflessione (*a*) o nessuna delle due (1), nella direzione parallela alla direzione di traslazione;
- l'ultimo simbolo può essere un 1 o un 2, ed indica la presenza (2), o l'assenza (1) di una rotazione di π.

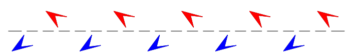
Per una rappresentazione universale, si è scelto di utilizzare insieme le lettere dell'alfabeto ed una rappresentazione a colori, dove le linee continue rappresentano gli assi di riflessione, i punti i centri di rotazione e la linee tratteggiate gli assi di glisso – riflessione non banali.

- **p111** Questo gruppo contiene infinite traslazioni.

  F F F F F F F F F F

- **p1a1** Questo gruppo contiene infinite traslazioni e glisso – riflessioni.

  p b p b p b p b p b p

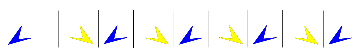


- **p112** Questo gruppo contiene infinite traslazioni e rotazioni di 180° (i cui i centri sono una serie di punti equidistanti).

  S S S S S S S S S S

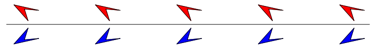
- **pm11** Questo gruppo contiene infinite traslazioni e riflessioni su rette ortogonali alla direzione di traslazione.

  A A A A A A A A A A



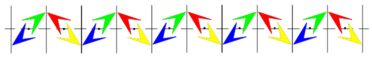
- **p1m1** Questo gruppo è formato da una sola riflessione su una retta parallela alla direzione di traslazione e contiene infinite traslazioni.

E E E E E E E E E E



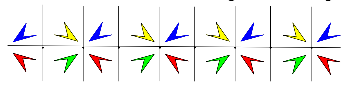
- **pma2** Questo gruppo è formato da una rotazione di 180° ed una glisso – riflessione, e contiene infinite traslazioni e riflessioni su rette ortogonali alla direzione di traslazione.

bd pq bd pq bd pq bd pq bd pq



- **pmm2** Questo gruppo è formato da due riflessioni con assi tra loro ortogonali e contiene infinite traslazioni e rotazioni di 90° e 180° (i cui centri sono una serie di punti equidistanti).

X X X X X X X X X X

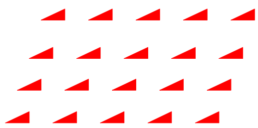
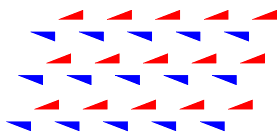


Simmetrie planari

Si chiamano simmetrie planari quelle simmetrie che hanno due direzioni di traslazione. Esse si distinguono in 17 gruppi, frequentemente rappresentati mediante mosaici; adottando la notazione cristallografica, si ha:

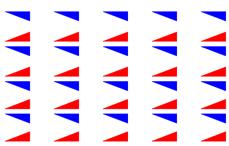
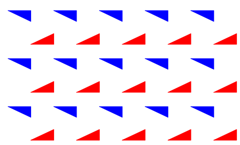
- per il primo simbolo, *p* (primitiva) o *c* (centrata, dove le direzioni di traslazione e/o degli assi di riflessione non coincidono con gli assi del lattice o della regione fondamentale);
- per il secondo simbolo, un numero che indica il numero massimo di rotazioni ammissibili;
- per il terzo simbolo, *m* (dall'inglese: mirror, cioè specchio), *g* (dall'inglese: glide, cioè scivolata) o 1 ed indica rispettivamente la presenza di una riflessione, una glisso – riflessione o la loro assenza, nella prima direzione di traslazione;
- per l'ultimo simbolo, *m*, *g* o 1 ed indica rispettivamente la presenza di una riflessione, una glisso – riflessione o la loro assenza, nella seconda direzione di traslazione.

- **p111 = p1** Questo gruppo contiene sole traslazioni i cui assi possono essere inclinati di un angolo qualsiasi. Il lattice è a parallelogramma e la regione fondamentale un parallelogramma.

 ⇑  ⇓

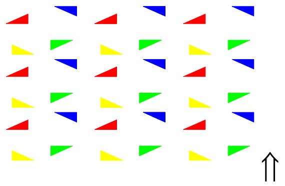
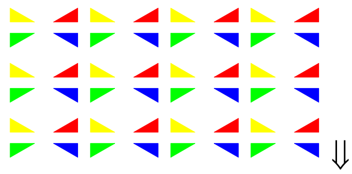
- **p211 = p2** Questo gruppo contiene traslazioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°). Gli assi di traslazione possono esser inclinati di un angolo qualsiasi. Il lattice è a parallelogramma e la regione fondamentale la metà triangolare di un parallelogramma.

- **p1m1 = pm** Questo gruppo contiene traslazioni e riflessioni. Gli assi di riflessione sono paralleli ad un asse di traslazione e perpendicolari all'altro. Non esistono rotazioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale la metà rettangolare di un rettangolo.

 ⇑  ⇓

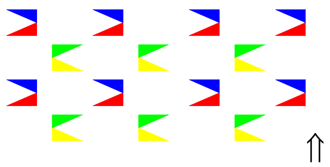
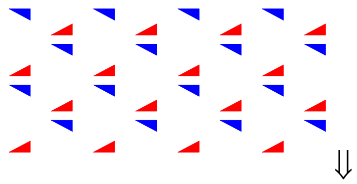
- **p1g1 = pg** Questo gruppo contiene traslazioni e glisso – riflessioni. La direzione della glisso – riflessione è parallela ad un asse di traslazione e perpendicolare all'altro. Non esistono rotazioni, né riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale la metà rettangolare di un rettangolo (ortogonale a quella del gruppo precedente).

- **c1m1 = cm** Questo gruppo contiene traslazioni, riflessioni con assi paralleli e glisso – riflessioni. Le traslazioni possono essere inclinate di un angolo qualsiasi, ma gli assi di riflessione bisecano gli angoli formati dalle traslazioni. Non esistono rotazioni. Il lattice è rombico e la regione fondamentale la metà di un rombo.

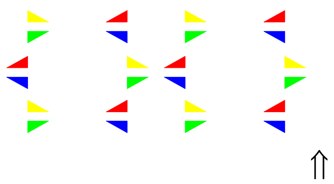
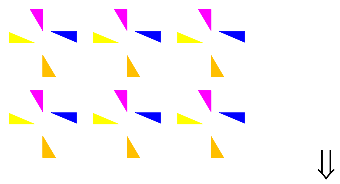
- **p2mm = pmm** Questo gruppo contiene traslazioni, doppie riflessioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°). Anche in questo caso, gli assi di traslazione possono esser inclinati di un angolo qualsiasi. Non esistono glisso – riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale un quarto di un rettangolo.

- **p2mg = pmg** Questo gruppo contiene traslazioni, riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e glisso – riflessioni. I centri di rotazione non giacciono sugli assi di riflessione. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale un rettangolo per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di un rettangolo (a striscia) per l’intero gruppo. Si noti come questo fatto renda questo gruppo di simmetrie, come alcuni altri gruppi nel seguito, formalmente un po’ più complesso.

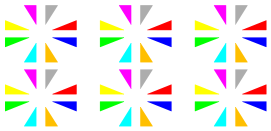
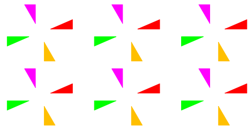
- **p2gg = pgg** Questo gruppo contiene traslazioni, glisso – riflessioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°). Gli assi di glisso – riflessione sono perpendicolari ed i centri di rotazione non giacciono su questi assi. Non esistono riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale un rettangolo per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di un rettangolo per l’intero gruppo.

- **c2mm = cmm** Questo gruppo contiene traslazioni, doppie riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e doppie glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono perpendicolari ed i centri di rotazione non giacciono su questi assi. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un rombo per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di un rombo per l’intero gruppo.

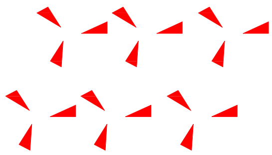
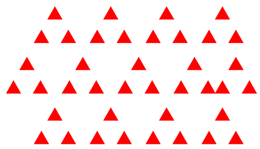
- **p411 = p4** Questo gruppo contiene traslazioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e 4 (ovvero di 90°). I centri di rotazione di ordine 2 sono a metà tra i centri di rotazione di ordine 4. Non esistono riflessioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è quadrato e la regione fondamentale un quadrato per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di quadrato per l’intero gruppo.

- **p4mm = p4m** Questo gruppo contiene traslazioni, quadruple riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e 4 (ovvero di 90°) e doppie glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono inclinati di un angolo di 45°; pertanto essi passano per i centri di rotazione di ordine 4. Il lattice è quadrato e la regione fondamentale un triangolo pari all'ottava parte (centripeta) di un quadrato.

 ⇑  ⇓

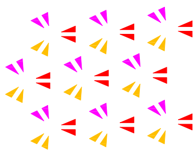
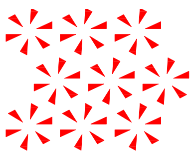
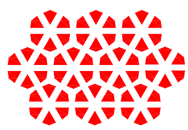
- **p4gm = p4g** Questo gruppo contiene traslazioni, doppie riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e 4 (ovvero di 90°) e quadruple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono perpendicolari e nessun centro di rotazione giace sugli assi di riflessione. Il lattice è quadrato e la regione fondamentale un triangolo pari all'ottava parte (perimetrale) di un quadrato.

- **p311 = p3** Questo gruppo contiene traslazioni e rotazioni di ordine 3 (ovvero di 120°). Non esistono riflessioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un rombo pari alla terza parte (centrale) di un rombo. Si osservi a riguardo, come i quattro angoli del rombo (due pari a 60° e due pari 120°), proprio per i loro particolari valori di ampiezza, permettano una diversa e più complessa organizzazione dello spazio piano in esagoni (raggruppando tre rombi alla volta). La stessa osservazione valga anche per tutti gli altri quattro gruppi illustrati di seguito.

 ⇑  ⇓

- **p31m = p31m** Questo gruppo contiene traslazioni, triple riflessioni, rotazioni di ordine 3 (ovvero di 120°) e triple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono inclinati di 60° uno con l'altro ed alcuni centri di rotazione sono sugli assi di riflessione. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un triangolo, pari alla metà del rombo di cui al caso precedente.

- **p3m1 = p3m1** Questo gruppo contiene traslazioni, triple riflessioni, rotazioni di ordine 3 (ovvero di 120°) e triple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono inclinati di 60° e tutti i centri di rotazione giacciono sugli assi di riflessione. Il lattice è rombico e la regione fondamentale lo stesso triangolo del caso precedente.

 ⇑  ⇓  ⇓⇓

- **p611 = p6** Questo gruppo contiene traslazioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°), 3 (ovvero di 120°) e 6 (ovvero di 60°). Non esistono riflessioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un aquilone (apicale).

- **p6mm = p6m** Questo gruppo contiene traslazioni, sestuple riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°), 3 (ovvero di 120°) e 6 (ovvero di 60°) e sestuple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione incontrano tutti i centri di rotazione e, nei centri delle rotazioni di ordine 6, si incontrano i sei assi di riflessione inclinati di 30°. Il lattice è rombico e la regione fondamentale la metà dello stesso aquilone.

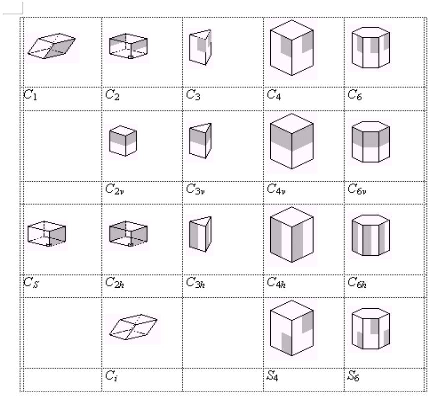
Simmetrie spaziali

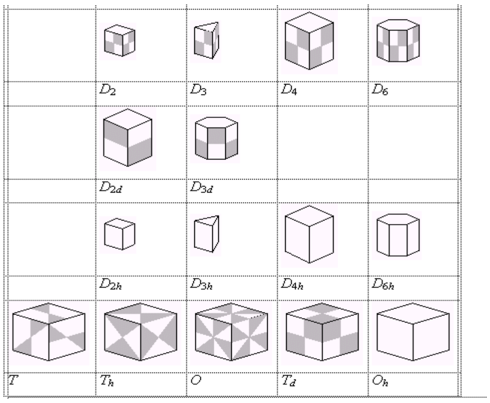
Si chiamano simmetrie spaziali quelle simmetrie che hanno tre direzioni di traslazione. Un lattice 3D è un insieme discreto di punti generato da tre vettori linearmente indipendenti. Questi vettori generano un gruppo additivo discreto che è noto, in algebra, come il gruppo di traslazione dei lattici. Ogni elemento può essere associato a un punto del lattice. Come per tutti gli oggetti finiti, la geometria del lattice è descritta dal suo gruppo di simmetrie, cioè dal gruppo completo di isometrie che lo lascia invariato. Esistono 7 sistemi di cristalli la cui suddivisione rappresenta l'arrangiamento dei gruppi in famiglie di sottogruppi: triclino, monoclino, ortorombico, trigonale, tetragonale, esagonale, cubico. Combinando opportunamente i 7 sistemi di cristalli, si ottengono i 14 lattici di Bravais, riportati nella seguente tabella.

Sistemi:	**N.**	**Classi:**	**Ordini:**	**N. di gruppi:**	**Lattici di Bravais e loro suddivisione:**	
1. triclino	1	1	1	1	1	1
	2	$\bar{1}$	2	1	1	1
2. monoclino	3	2	2	3	3	3
	4	m	2	4	4	4
	5	$2/m$	4	6	6	7
3. ortorombico	6	222	4	9	9	12
	7	$mm2$	4	22	13	16
	8	mmm	8	28	14	17
4. trigonale	16	3	3	4	4	4
	17	$\bar{3}$	6	2	2	2
	18	32	6	7	7	9
	19	$3m$	6	6	6	7
	20	$\bar{3}$m	12	6	6	7
5. tetragonale	9	4	4	6	6	7
	10	$\bar{4}$	4	2	2	2
	11	$4/m$	8	6	6	7
	12	422	8	10	10	13
	13	$4mm$	8	12	11	14
	14	$\bar{4}2m$	8	12	11	14
	15	$4/mmm$	16	20	12	15
6. esagonale	21	6	6	6	6	7
	22	$\bar{6}$	6	1	1	1
	23	$6/m$	12	2	2	2
	24	622	12	6	6	7
	25	$6mm$	12	4	4	4
	26	$\bar{6}m2$	12	4	4	4
	27	$6/mmm$	24	4	4	5
7. cubico	28	23	12	5	5	6
	29	$m3$	24	7	7	10
	30	432	24	8	8	11
	31	$\bar{4}3m$	24	6	6	8
	32	$m3m$	48	10	10	13

A partire dai 14 lattici di Bravais, il numero 17 può essere messo in evidenza dividendo opportunamente, in due parti, i lattici i cui ordini, eccessivamente sparsi, variano da meno di 8 a più di 12 (ovvero isolando dagli altri lattici di Bravais le classi $6/mmm$, $m3$ e $\bar{4}3m$, aventi ciascuno ordine 24). Infatti tenendo conto della limitazione cristallografica (dove le rotazioni presentano soltanto gli ordini 1, 2, 3, 4 e 6) esistono 32 gruppi di simmetrie, mentre senza alcuna limitazione, si hanno 230 gruppi di simmetrie. In questo caso, la dimensione dei 10 ordini varia da 1 a 48 (cioè 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48). Pertanto tranne il numero 14 dei lattici di Bravais, tutti gli altri numeri ricordano i numeri già trovati, tenendo conto dei gruppi di simmetrie lineari e planari.

Nella figura sottostante sono indicati i solidi di riferimento dei 32 gruppi di simmetrie dei cristalli (considerando la restrizione cristallografica) ed evidenziando, in grigio, le regioni di simmetria.





Alle considerazioni precedenti sulle numerosità dei vari gruppi di simmetrie che si rincorrono, da un caso all'altro, si aggiunga che sono 7 le superfici finite 2D euclidee e sferiche (ovvero il piano, il cilindro, il nastro di Moebius, il toro, la bottiglia di Klein; la sfera ed il piano proiettivo) e 17 le ipersuperfici 3D euclidee (non considerando lo spazio euclideo 3D e lo spazio euclideo con un buco, cioè un toro in un movimento di traslazione). Al contrario, sono infinite tanto le superfici 2D iperboliche, quanto le ipersuperfici 3D sferiche ed iperboliche, mentre gli studi sulle ipersuperfici 4D, di qualsiasi tipo, ancora non sono terminati.

Conclusione

La storia racconta che, nel 1891, Fedorov dimostrò l'esistenza di soltanto 7 tipi diversi di simmetrie per fregi (o greche) lineari e 17 per mosaici planari. Inoltre i gruppi planari possono esibire simmetrie rotazionali solo per angoli di 180°, 120°, 90°, 60°, cioè di tipo assiale, triangolare, quadrato ed esagonale. Se gli oggetti planari simmetrici più comuni sono le decorazioni, quelli spaziali più noti sono i cristalli. A partire dal 1849, con Auguste Bravais, la cristallografia fu uno dei primi campi di applicazione della teoria dei gruppi. Inoltre nel 1890, prima di dimostrare l'analogo risultato per i gruppi di simmetrie planari, Fedorov aveva già dimostrato l'esistenza di soltanto 230 tipi diversi di simmetrie spaziali.

La prima parte del 18° problema di Hilbert chiedeva se, per ogni n, i gruppi di simmetrie a n dimensioni sono un numero finito. Nel 1910, una risposta positiva fu data da Ludwig Bieberbach; tuttavia ancora oggi non si conosce una relazione esplicita che dia il numero di tali gruppi per un qualsiasi n dato. Infatti solo negli anni '70, si è riusciti a dimostrare che esistono 4783 gruppi di simmetrie quadridimensionali.

Parecchie applicazioni nell'elaborazione di immagini e nella modellazione 3D richiedono la definizione di modelli concettuali che implicano la conoscenza delle topologie 3D. Come noto, operare nello spazio 3D è molto più complesso di operare nel piano 2D. Di conseguenza, lo studio parallelo delle relazioni topologiche e geometriche fra gli elementi base e delle simmetrie (negli spazi in cui gli oggetti complessi sono disposti) è importante, come fondamento logico della concezione, e mostra curiose analogie fra i numeri trovati in insiemi e gruppi messi a confronto fra loro. Infatti la modellazione di oggetti si occupa della ricostruzione di linee, superfici e corpi 3D. Talvolta le linee chiuse sono contorni di figure e le superfici chiuse sono superfici esterne di corpi 3D. Con particolare riferimento ai casi più complessi di modellazione, metodi discreti di triangolazione o tetraedrazione rappresentano passi preliminari alla ricostruzione di linee e superfici mediante forme parametriche ed altri tipi di modellazione al continuo.

Bibliografia essenziale

Dedò M. (1996): Trasformazioni geometriche. Decibel / Zanichelli, Padova / Bologna.
Dedò M. (1999): Forme – simmetria e topologia. Decibel / Zanichelli, Padova / Bologna.
Enriques F. (1938 / 1971): Le matematiche nella storia e nella cultura. Zanichelli, Bologna.
Gasapina U., Marchionna E. (1972): Appunti ed esercizi di geometria. La Viscontea, Milano.
Gasapina U., Marchionna Tibiletti C. (1977): Lezioni di algebra. La Viscontea, Milano.