Problemi di bilancio

Susanna Alberti([a]), Luigi Mussio([b])

([a]) Politecnico di Milano, DICA, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano
Tel. 02-2399-6604 – Fax 02-2399-6602 – e-mail: susanna.alberti@polimi.it
([b]) Politecnico di Milano – DICA – Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-6501 – Fax 02-2399-6602 – e-mail: luigi.mussio@polimi.it

Riassunto – Un interessante esempio formalizza problemi di bilancio (flusso, trasporto, traffico e circolazione), in generale, presenti nelle discipline ingegneristiche civili ed ambientali, od in quelle industriali e dell'informazione, come pure in altre materie delle scienze della terra o dell'ambiente. Date così alcune osservabili, in generale, è semplice il legame tra queste ed i parametri d'interesse (di solito differenze prime e/o seconde, per quanto riguarda la struttura reticolare, e coefficienti di polinomi, per la modellazione fisico-geometrica delle stesse osservabili). Dopodiché un'opportuna estensione di questi problemi introduce nel sistema da risolvere, oltre alle usuali relazioni, con vincoli di uguaglianza, anche alcune relazioni, con vincoli di disuguaglianza.

Abstract – An interesting example formalizes balance problems (flow, transportation, traffic and circulation), generally present in civil and environmental engineering disciplines, or in industrial and information ones, as well as in other disciplines of the earth and environmental sciences. Given some observables, it is generally simple to model the linkage between these and some parameters (usually first and/or second differences, referred to the lattice structure, and polynomial coefficients, regarding to the physical-geometric modeling of the same observables). Finally an appropriate extension of these optimization problems introduces, in the system, some relations, with inequality constraints, in addition to the traditional ones, with equality constraints.

Calcolo di una rete con un problema di bilancio

Un interessante esempio di Trattamento delle osservazioni prende in considerazione un problema di bilancio, lineare e poco ridondante, dove le informazioni sono solo ingressi ed uscite (ed un solo ingresso ed una sola uscita, nell'esempio proposto), e dove il reticolo interno (un ottaedro, connesso con i suoi lati e con le diagonali del quadrato centrale) è descritto attraverso fattori di forma (anziché con osservazioni dirette, come usuale nelle discipline del rilevamento).
A riguardo, assunto qui un modello stocastico di pseudo-osservazioni indipendenti e di uguale precisione[1], il modello funzionale adottato ha espressione atta a collegare, per ogni arco esistente, i parametri incogniti, relativi ai nodi (Q_i) del reticolo dato, ai parametri che modellano le pseudo-osservazioni, attraverso i suddetti fattori di forma (nell'esempio proposto, una combinazione lineare con un termine noto e tre parametri lineari, indipendenti tra loro: a, b, c, d):

$$Q_j \quad Q_i \quad \left(a + bS_{ij} + cD_{ij} + dU_{ij}\right) = v_{ij}$$

La soluzione ottimale, data dal metodo di minimi quadrati, minimizza la norma quadratica del vettore degli scarti-residui (v) delle equazioni del sistema, dove è nullo il termine noto dello stesso, per quanto riguarda sia le osservazioni (y) che eventuali dati accessori (b), ed è qui unitaria la matrice dei pesi (P), avendo riunito in un unico vettore (x) i parametri incogniti di questo sistema.

[1] Questa scelta è solo usuale e la più semplice; nulla cambia avere pesi (cioè dati pesati ed eventualmente anche correlazioni, fra i dati).

La soluzione ottenuta [2] dà le stime di tutti i parametri, gli scarti residui e gli sqm di entrambi, permettendo il calcolo delle osservazioni compensate.

$$y = Ax + b \qquad \text{essendo} \qquad v^T Pv = min$$

$$\text{(con} \quad v = y_{compensato} \quad y_{pseudo \;\; osservato}\text{)}$$

DATI RETICOLO (N. Nome dei punti, Qualificazione dei lati)

1	1	2	1.000	1.000	1.000
2	2	3	2.000	3.000	16.000
3	2	4	3.000	5.000	2.000
4	2	5	4.000	7.000	15.000
5	2	6	5.000	9.000	3.000
6	3	4	6.000	11.000	14.000
7	4	5	7.000	13.000	4.000
8	5	6	8.000	15.000	13.000
9	6	3	9.000	16.000	5.000
10	3	5	10.000	14.000	12.000
11	4	6	11.000	12.000	6.000
12	3	7	12.000	10.000	11.000
13	4	7	13.000	8.000	7.000
14	5	7	14.000	6.000	10.000
15	6	7	15.000	4.000	8.000
16	7	8	16.000	2.000	9.000

VINCOLI (Nome punto, Quantità vincolata)

1	25.000
8	10.000

METODO DEI MINIMI QUADRATI

SOLUZIONE E SQM

1	25.000	0.000	(Nodi del reticolo)
2	19.807	2.422	
3	16.876	3.630	
4	16.938	3.775	
5	16.948	3.629	
6	17.120	3.583	
7	14.473	2.320	
8	10.000	0.000	
9	-5.127	2.609	(Coefficienti descrittivi dei lati)
10	0.001	0.270	
11	0.329	0.075	
12	0.047	0.081	

[2] Come noto, il calcolo della soluzione richiede la costruzione della matrice normale e del termine noto normale, a partire dalla matrice disegno e dal termine noto del sistema, nonché l'imposizione dei vincoli, se il sistema presenta un difetto di rango e/o deve tener conto di informazioni esterne (come nell'esempio proposto). Dopodiché gli algoritmi di algebra lineare permettono la soluzione del sistema e l'inversione della matrice normale, fornendo così tutti i dati ed i metadati cercati, di un problema ai minimi quadrati.

DATI COMPENSATI, RESIDUI [3], SQM E RIDONDANZE LOCALI [4]

1	1	2	-4.750	-0.444	0.222	0.030
2	2	3	-3.383	0.452	0.679	0.277
3	2	4	-3.385	0.516	0.753	0.341
4	2	5	-2.113	-0.746	0.892	0.478
5	2	6	-2.020	-0.666	0.879	0.464
6	3	4	-0.842	0.904	0.851	0.435
7	4	5	-0.655	0.665	0.738	0.328
8	5	6	0.428	-0.256	0.795	0.380
9	6	3	0.381	-0.625	0.463	0.129
10	3	5	0.054	0.018	0.819	0.403
11	4	6	-0.886	1.068	0.917	0.506
12	3	7	-1.307	-1.096	0.983	0.580
13	4	7	-2.153	-0.313	0.973	0.569
14	5	7	-2.668	0.193	0.991	0.591
15	6	7	-3.419	0.772	0.874	0.459
16	7	8	-4.029	-0.444	0.222	0.030

SIGMA ZERO, N. CONDIZIONE 1.290 2.046D+08

Una soluzione robusta è fornita dal metodo della minima somma dei moduli (anche se altre soluzioni robuste possono essere adottate, spesso con un punto di rottura maggiore e comunque capaci di preservare meglio le proprietà ottimali, nei confronti del grosso buono dei dati). Allo scopo, lo stesso sistema è decomposto in un primo sistema, di tante equazioni quante incognite, che dà una soluzione unica, senza scarti-residui, ed un secondo sistema, delle equazioni rimanenti, scelte in modo tale da rendere minima la norma uno:

$v = Ax + b$ essendo $\|v\|_1 = min$ (con $v = y_{compensato} \quad y_{pseudo \ \ osservato}$)

<u>SOLUZIONE CON LA MIN. SOMMA DEI MODULI</u> [5]

RANGO MATRICE NORMALE 12 N. ITERERAZIONI SIMPLESSO 17

CODICE DELLA SOLUZIONE (SOLUZIONE OTTIMALE = 1) 1

SOLUZIONE, DATI COMPENSATI E RESIDUI

1	25.000	1	2	-4.419	0.000	(Nodi del reticolo)
2	20.581	2	3	-2.616	0.000	
3	17.965	2	4	-3.267	0.000	
4	17.315	2	5	-1.633	1.197	
5	17.751	2	6	-2.115	0.384	
6	18.082	3	4	-0.651	0.000	
7	14.607	4	5	-0.963	-1.399	
8	10.000	5	6	0.332	0.000	

[3] Usualmente nelle discipline del rilevamento, gli scarti-residui sono una spia degli eventuali errori di misura e di modello. Invece nei problemi con informazioni solo su ingressi ed uscite, dove un reticolo interno è descritto attraverso fattori di forma, i residui solo errori di modelli, in quanto stime di quantità in ingresso che non arrivano all'uscita, ma si fermano lungo gli archi del reticolo stesso.

[4] Come noto, le ridondanze locali servono ad individuare eventuali difetti di affidabilità dello schema di osservazione, mentre il numero di condizione (sotto-riportato) mette in evidenza il buono o cattivo condizionamento del sistema.

[5] Il metodo della minima somma dei moduli fornisce la soluzione cercata, tanto iterativamente, con la strategia dei minimi quadrati ripesati, quanto con l'algoritmo del simplesso di Cottle e Dantzig che opera sequenzialmente, fra i suddetti due sistemi.

9	-4.731	(Coefficienti descrittivi dei lati)			
10	-0.078				
11	0.306				
12	0.085				
9		6	3	-0.117	0.000
10		3	5	-0.215	0.000
11		4	6	-1.412	-2.180
12		3	7	-1.679	1.679
13		4	7	-2.707	0.000
14		5	7	-3.143	0.000
15		6	7	-4.002	-0.527
16		7	8	-4.607	0.000
17 [6]					0.000
18					0.000
VALORE ASSOLUTO MEDIO					1.228

L'esempio proposto presenta un certo interesse, perché formalizza problemi di flusso, di trasporto, di traffico e di circolazione, in generale, presenti nelle discipline ingegneristiche civili ed ambientali, oppure industriali e dell'informazione, come pure in varie altre materie di scienze della terra o dell'ambiente. Infatti le strutture reticolari prese in considerazioni dai problemi, presenti nelle suddette discipline e materie, sono soprattutto lineari nei parametri dei nodi, così come nei coefficienti di eventuali polinomi di servizio.
Questa constatazione può sembrare sorprendente, data la notevole complessità di molte di queste discipline e materie; tuttavia a differenza delle discipline del rilevamento, date alcune osservabili, in generale, è molto semplice il legame tra queste ed i parametri d'interesse (di solito differenze prime e/o seconde, per quanto riguarda la struttura reticolare, propriamente detta, ed i coefficienti di polinomi, per la modellazione geometrica e/o fisica delle stesse osservabili [7]).

Ottimizzazione con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza

I problemi classici di Teoria della stima, quali il metodo dei minimi quadrati e le procedure robuste (come la minima somma dei moduli) risolvono usualmente equazioni di osservazione (e di pseudo-osservazione, se necessarie o convenienti, sovrappesate e non), con vincoli di uguaglianza. Tuttavia un'opportuna estensione di questi stessi problemi introduce, nel sistema da risolvere, anche relazioni, con vincoli di disuguaglianza. In questo modo, il calcolo della soluzione con il criterio della minima somma dei moduli può essere effettuato con il metodo del simplesso, indipendentemente dalla presenza di vincoli di disuguaglianza o meno. Invece il calcolo con il criterio dei minimi quadrati richiede di trasformare lo stesso problema nel cosiddetto problema lineare complementare, grazie alle condizioni di Karush – Kuhn – Tucker.
Come noto il metodo del simplesso risolve problemi in noma L_1, tramite l'algoritmo omonimo, proposto da Cottle e Dantzig, ed ottimizzato, da un punto di vista informatico, da Barrodale e Roberts. Invece il problema lineare complementare risolve problemi in norma L_2, opportunamente trasformati, tramite un algoritmo, proposto da Lemke ed ottimizzato, ancora da un punto di vista informatico, da Ravindran. Questi algoritmi richiedono la positività tanto della soluzione, quanto

[6] Gli ultimi due residui corrispondono alle due equazioni, di osservazione diretta, per i due parametri vincolati di ingresso e di uscita.
[7] Come noto invece, le discipline del rilevamento presentano parecchie equazioni non-lineari, a partire, da distanze ed angoli, per arrivare alle equazioni di collinearità e complanarità della fotogrammetria.

degli scarti-residui, cosa sempre possibile, del resto (mediante opportuni cambi di segno), trattandosi comunque di relazioni lineari. Per quanto riguarda l'effettiva utilità di questa estensione, molti problemi di trasporto presentano relazioni lineari (addirittura alle differenze prime) e possono essere soggetti anche a vincoli di disuguaglianza.
Infatti la presenza di osservazioni, con una certa incertezza, può suggerire l'effettuazione di controlli ad hoc, ponendo alcuni limiti alla variabilità delle stime (vincoli di disuguaglianza). Ad esempio, tradizionalmente in Geomatica, sono solo vincoli di uguaglianza le equazioni ai dislivelli, ma una loro eccessiva incertezza può suggerire di porre vincoli su una successione ordinata di quote. Analogamente controlli seriali possono poi essere introdotti su molte altre misure planimetriche e plano-altimetriche, e sulle stime di coordinate, derivate da queste. Altri controlli possono essere richiesti dalle misure di monitoraggio, dalla galassia delle immagini, dal mondo dei sistemi informativi geografici e territoriali, come pure in altri campi, anche molto lontani dalla Geomatica, dove tuttavia applicazioni geomatiche specifiche portano a scelte simili.

- Modello matematico esteso per la programmazione quadratica:

$$v = Ax + b \qquad \text{con} \qquad x \geq 0 \qquad \text{e} \qquad v \geq 0$$
$$\text{essendo} \qquad v^T x = 0$$

dove nel termine noto b, sono compresi le osservazioni y^0 ed eventuali valori numerici , nella forma: y^0, e il prodotto scalare nullo: $v^T x = 0$, fra i parametri incogniti x e gli scarti residui v, esprime la condizione di ortogonalità, propria del metodo dei minimi quadrati ($\|v\|_2 = min$), che generalizza il teorema di decomposizione ortogonale della varianza.

- Modello lineare complementare per la programmazione quadratica, dato dalle condizioni di Karush – Kuhn – Tucker e risolubile con l'algoritmo di Lemke:

$$\begin{matrix} v \\ u \end{matrix} = \begin{matrix} A^T A & A \\ A & 0 \end{matrix} \; \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} + \begin{matrix} A^T b \\ b \end{matrix}$$

ovvero:

$$w = Cz + d \qquad \text{con} \qquad z \geq 0 \qquad \text{e} \qquad w \geq 0$$
$$\text{essendo} \qquad w^T z = 0$$

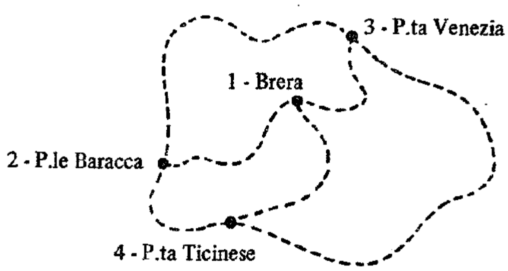
cosicché, ai fini del calcolo della soluzione, è necessario costruire solo una matrice "normale" estesa C ed un termine noto "normale" esteso d (notando poi che qui, come in precedenza e nel seguito, i vincoli di disuguaglianza sui parametri e sugli scarti residui permettono di assorbire anche quelli eventualmente presenti in alcune o tutte le equazioni del sistema da risolvere). Invece l'eventuale presenza di una data matrice dei pesi P non pone difficoltà di sorta, bastando solo premoltiplicare tutte le osservazioni e tutti gli altri coefficienti presenti per la radice quadrata dei pesi (operazione elementare, se la matrice dei pesi è diagonale ed altrimenti sempre possibile, rinviando tuttavia ad altri lavori, per i dettagli del caso).

- Modello matematico esteso per la programmazione lineare:

$$v = Ax + b \qquad \text{con} \qquad x \geq 0 \qquad \text{e} \qquad v \geq 0$$
$$\text{essendo} \qquad \|v\|_1 = min$$

dove valgono le stesse condizioni numeriche della programmazione quadratica, mentre diverse sono le proprietà statistiche. In particolare, non vale il teorema di decomposizione ortogonale della varianza e la sua estensione, al caso multidimensionale, mentre il sistema di equazioni di osservazione (e di pseudo-osservazione, se presenti) si decompone in un primo sistema, di tante equazioni quante incognite, che dà una soluzione unica, senza scarti residui, ed un secondo sistema, delle equazioni rimanenti, scelte in modo tale da rendere minima la norma uno (ed ottenendo la minima somma dei moduli di questi scarti), con l'algoritmo del simplesso di Cottle e Dantzig (che opera sequenzialmente tra questi due sistemi).

Un semplice esempio di una piccola rete di livellazione geometrica nel centro storico della città di Milano è qui ripreso ed esteso, per trasformarlo in un generico problema di trasporto, comprensivo di ingressi ed uscite, modellati come rami aperti, a partire dai quattro nodi della rete. In questo modo, in totale, si hanno otto nodi e dieci lati (di cui quattro aperti), oltre ad una condizione arbitraria di vincolo, sul nodo Brera, per sanare il difetto di rango del sistema di equazioni risultante.



I risultati ottenuti sono riassunti nelle due seguenti tabelle.

- Modello esteso per la programmazione quadratica:

LINEAR COMPLEMENTARITY ALGORITHM

SOLUZIONE INIZIALE

1	1	23.052	11	1	22.065
2	1	19.811	12	1	16.936
3	1	22.343	13	1	21.255
4	3	16.302	14	1	21.886
5	1	16.302	15	1	16.302
6	1	16.302	16	1	16.302
7	1	16.302	17	1	16.302
8	1	16.302	18	1	16.302
9	1	17.111	19	1	16.302
10	1	16.479			

ITERAZIONE N.	1	SIGMA ZERO	2.958
	2		1.233
	3		0.530
	4		0.221
	5		0.132
	6		0.001
	7		0.102

SOLUZIONE COMPLEMENTARE

1	1	-0.001	0.000
8	2	0.000	5.763 *
6	2	0.000	0.810 *
7	2	0.001	0.177 *
5	1	0.001	0.000
2	2	-0.001	0.810 *
3	2	0.000	0.177 *
4	2	0.000	5.763 *
9	1	0.000	1.619
19	1	5.763	0.000
10	1	0.000	0.354
11	1	0.000	11.526
12	1	0.000	1.267
13	1	0.810	9.906
14	1	0.177	11.171
15	1	5.763	0.000
16	1	0.000	0.000
17	1	0.810	0.000
18	1	0.177	0.000

N.	SOLUZIONE	RESIDUI
1	120.000	-0.001
2	119.190	0.000
3	119.823	0.000
4	114.237	0.001
5	120.000	0.001
6	119.190	-0.001
7	119.823	0.000
8	114.237	0.000
9		0.000
10		0.000
11		0.000

ITERAZIONE N. 6 SIGMA ZERO 0.001

- Modello esteso per la programmazione lineare:

LEAST ABSOLUTE DEVIATIONS

DATI (COEFFICIENTI E TERMINE NOTO)

1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8094
1.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1774
1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.7633
0.0	-1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6344
0.0	1.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.9535
0.0	0.0	1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.5848
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000
1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0000
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0000
0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0000
0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0000

RANGO MATRICE NORMALE 8 N. ITERERAZIONI SIMPLESSO 9
CODICE SOLUZIONE (SOLUZIONE OTTIMALE = 1) 0

N.	SOLUZIONE	RESIDUI
1	120.000	0.000
2	119.191	0.000
3	119.823	0.000
4	114.237	0.002
5	120.000	0.000

6	119.191	-0.001
7	119.823	0.000
8	114.237	0.000
9		0.000
10		0.000
11		0.000

VALORE ASSOLUTO MEDIO 0.000

Alcune precisazioni permettono una lettura migliore dei risultati. Infatti tutti i dati si riferiscono ovviamente ad entrambi gli esempi, dove la quota 120.000 è attribuita al caposaldo di Brera, per rendere realistico il calcolo stesso (essendo questa grossolanamente la quota media della città di Milano). Dopodiché il codice zero, della soluzione in norma uno (al posto del codice uno, riferito ad una soluzione ottimale ed unica) è da attribuirsi all'estrema esiguità degli scarti residui, cosicché la stessa soluzione minima è ottenibile da più percorsi, sul grafo, diversi tra loro.
Tradizionalmente poi nelle discipline del rilevamento, si accompagnano tutte le stime (parametri, scarti residui ed osservazioni compensate) con i loro scarti quadratici medi, per poter dare giudizi statistici sull'accuratezza, precisione ed affidabilità. In questo modo, l'inversione della matrice normale classica e le successive propagazioni della covarianza corredano la soluzione trovata, in norma due, mentre nulla si ha, in norma uno (come sempre). Così ancora una volta, la norma uno fornisce una procedura robusta (del tutto assente, in norma due) e giocoforza è solo preliminare a questa (a sua volta, invece ottimale).

SUBROUTINE ELONE [8]

- Esecuzione di un ciclo sul numero di incognite, con azzeramento di un vettore e predisposizione di un indicatore delle incognite.
- Esecuzione di un ciclo sul numero di equazioni, con azzeramento di un vettore e predisposizione di un indicatore delle equazioni (incrementato del numero di incognite).
- Azzeramento di un indice condizionante, di un terzo vettore e di uno scalare, con successiva addizione al vettore delle singole colonne della matrice disegno ed allo scalare del termine noto.
- Avvio di un primo ciclo condizionato da un indice, in evoluzione nel ciclo stesso, con modifica preliminare dell'indice condizionante, previa:

  - azzeramento di un contatore;
  - inizializzazione ad uno di altri due contatori (riferiti uno alle incognite e l'altro alle equazioni).

- Ricerca del massimo, in valore assoluto, tra gli elementi del terzo vettore (a partire dal valore raggiunto dal secondo dei due contatori, inizializzati ad uno), purché l'indicatore delle incognite coinvolta sia non maggiore del loro numero.

- Questo valore individua l'incognita in ingresso e, se il suo valore (con il segno) è negativo:

  - si cambia il segno del valore, unitamente alla corrispondente colonna della matrice disegno ed all'indicatore della sua incognita.

[8] La descrizione per punti di questo algoritmo (così come del seguente) spiega l'intera procedura, ma è ancora abbastanza lontana da una loro codifica (che richiede invece il disegno di un flow-chart e la scelta di un codice linguaggio).

- Azzeramento di altri due indici condizionati e di un contatore scalare, con successivo ciclo sul numero delle equazioni (a partire dal valore raggiunto dal primo dei due contatori, inizializzati ad uno), dove:

  - si incrementa il contatore scalare;
  - si assegna poi la posizione stessa ad un nuovo indicatore;
  - si forma un nuovo vettore dividendo, riga per riga, ogni termine noto per il coefficiente della matrice disegno, corrispondente all'incognita in ingresso, purché lo stesso sia maggiore di una soglia di tolleranza prefissata.

- Avvio di un secondo ciclo condizionato dal secondo indice, in evoluzione nel ciclo stesso, con modifica preliminare dell'indice condizionante, seguito da:

  - un test sull'eventuale negatività del suddetto contatore scalare (con la conseguente modifica del terzo indice condizionante);
  - in alternativa, ricerca del minimo valore, tra gli elementi già selezionati del nuovo vettore.

- Questo valore individua l'equazione in uscita (perché già utilizzata); dopodiché:

  - si decrementa il contatore scalare;
  - si colloca l'ultimo elemento del nuovo indicatore e del nuovo vettore (prima del decremento) nel posto dell'equazione in uscita.

- Continuando l'alternativa, si seleziona l'elemento della matrice disegno, nella posizione dell'incognita in ingresso e dell'equazione in uscita, verificando che l'elemento del terzo vettore, corrispondente all'incognita in ingresso (cui sottrarre il doppio dell'elemento selezionato della matrice disegno), sia maggiore di una soglia di tolleranza prefissata.

- In questo caso, un ciclo sul numero delle incognite (a partire dal valore raggiunto dal secondo dei due contatori, inizializzati ad uno) fa sì che gli elementi del terzo vettore siano diminuiti del doppio del relativo elemento della matrice disegno (preso nella riga dell'equazione in uscita), a sua volta, cambiato di segno. Sempre continuando l'alternativa:

  - si sottrae allo scalare (predisposto unitamente al terzo vettore) il doppio del termine noto (preso sempre nella riga dell'equazione in uscita), a sua volta, cambiato di segno, insieme al corrispondente indicatore;
  - si inizializza poi nuovamente il secondo indice condizionante, chiudendo così il ciclo, governato dallo stesso.

- Ancora in questo caso, si esegue poi un passo di inversione gaussiana, scegliendo (quale elemento pivotale) l'elemento della matrice disegno, nella posizione dell'incognita in ingresso e dell'equazione in uscita; dopodiché:

  - si scambiano fra loro l'indicatore dell'equazione in uscita e l'indicatore dell'incognita in ingresso;
  - si incrementa di uno il contatore delle incognite entrate;
  - si scambia, nella matrice disegno (a partire dalla prima incognita, dopo quella in ingresso), la riga dell'equazione in uscita con la riga data dal passo d'inversione eseguito;
  - lo stesso scambio è eseguito anche nel termine noto e nell'indicatore delle equazioni;
  - si inizializza poi nuovamente il primo indice condizionante, chiudendo così il ciclo, governato dallo stesso.

- Il ciclo, governato dal primo indice condizionante, si chiude anche se si sia precedentemente modificato il terzo indice condizionante; in questo caso:

  - si scambia la colonna dell'incognita in ingresso con la colonna dell'ultima incognita selezionata;
  - lo stesso scambio è eseguito anche nel terzo vettore e nell'indicatore delle incognite;
  - si incrementa di uno il contatore delle equazioni entrate;
  - nel caso poi il numero di passi d'inversione e quello di incognite selezionate sia uguale al numero di incognite più uno, il primo indice condizionante è nuovamente modificato.

In questo modo, si conclude la ricerca di una soluzione ammissibile e si inizia la minimizzazione della soluzione, secondo il criterio della minima somma dei moduli.

- Avvio di un ciclo condizionato da un indice, in evoluzione nel ciclo stesso, con modifica preliminare dell'indice condizionante (previa azzeramento dello stesso indice).
- Ricerca del massimo, tra gli elementi del terzo vettore (a partire dal valore raggiunto dal secondo dei due contatori, inizializzati ad uno), purché positivi o minori di meno due (nel qual caso, solo l'elemento sottoposto a test è modificato, con un cambio di segno e sottraendo due).
- Questo valore individua l'incognita in ingresso e poi si procede, solo se esso è maggiore di una soglia di tolleranza prefissata; inoltre se il suo valore è negativo.

  - si cambia il segno del valore (sottraendo due), unitamente alla corrispondente colonna della matrice disegno ed all'indicatore della sua incognita.

- Azzeramento di altri due indici condizionati e di un contatore scalare, con successivo ciclo sul numero delle equazioni (a partire dal valore raggiunto dal primo dei due contatori, inizializzati ad uno), dove:

  - si incrementa il contatore scalare;
  - si assegna la posizione stessa allo stesso nuovo indicatore;
  - si continua poi a formare lo stesso nuovo vettore dividendo, riga per riga, ogni termine noto per il coefficiente della matrice disegno relativo all'incognita in ingresso, purché lo stesso sia maggiore di una soglia di tolleranza prefissata.

- Avvio di un secondo ciclo condizionato dal secondo indice, in evoluzione nel ciclo stesso, con modifica preliminare dell'indice condizionante, seguito da:

  - un test sull'eventuale negatività del suddetto contatore scalare (con la conseguente modifica del terzo indice condizionante);
  - in alternativa, ricerca del minimo valore, solo tra gli elementi già selezionati del nuovo vettore.

- Questo valore individua l'equazione in uscita (perché non utile alla minimizzazione della norma); dopodiché:

  - si decrementa il contatore scalare;
  - si colloca l'ultimo elemento del nuovo indicatore e del nuovo vettore (prima del decremento) nel posto dell'equazione in uscita.

- Continuando l'alternativa, si seleziona l'elemento della matrice disegno, nella posizione dell'incognita in ingresso e dell'equazione in uscita, verificando che l'elemento del terzo vettore, corrispondente all'incognita in ingresso (al quale si sottrae il doppio dell'elemento selezionato della matrice disegno), sia maggiore di una soglia di tolleranza prefissata.

- In questo caso, un ciclo sul numero delle incognite (a partire dal valore raggiunto dal secondo dei due contatori, inizializzati ad uno) fa sì che gli elementi del terzo vettore siano diminuiti del doppio del corrispondente elemento della matrice disegno (preso nella riga dell'equazione in uscita), a sua volta, cambiato di segno. Sempre continuando l'alternativa:
  - si sottrae allo scalare (predisposto unitamente al terzo vettore) il doppio del termine noto (preso sempre nella riga dell'equazione in uscita), a sua volta, cambiato di segno, insieme al corrispondente indicatore;
  - si inizializza poi nuovamente il secondo indice condizionante, chiudendo così il ciclo, governato dallo stesso.
- Ancora in questo caso, si esegue poi un passo di inversione gaussiana, scegliendo (quale elemento pivotale) l'elemento della matrice disegno, nella posizione dell'incognita in ingresso e dell'equazione in uscita;
  - si scambiano fra loro l'indicatore dell'equazione in uscita e l'indicatore dell'incognita in ingresso;
  - si inizializza poi nuovamente il primo indice condizionante, chiudendo così il ciclo, governato dallo stesso.
- Il ciclo, governato dal primo indice condizionante, si chiude anche se si sia precedentemente modificato il terzo indice condizionante; in questo caso:
  - la condizione di fine indica la mancanza di una soluzione accettabile.
- Trovata la soluzione, l'algoritmo si conclude, con un cambio di segno di equazioni, termine noto ed indicatore delle equazioni, se negativo è il rispettivo termine noto; dopodiché:
  - se il valore assoluto degli elementi del terzo vettore è maggiore di una soglia di tolleranza prefissata (come se lo stesso valore, sottratto a due, è maggiore di questa stessa soglia), la soluzione è unica;
  - altrimenti la soluzione è plurima.
- Infine dato che, nel metodo della minima somma dei moduli, tante quante sono le incognite (contenute nel primo vettore), altrettanti sono gli scarti residui nulli, ne deriva che solo gli scarti residui rimanenti possono essere non identicamente nulli (gli uni e gli altri essendo contenuti nel secondo vettore).

SUBROUTINE RAVINDRAN

- Ricerca del minimo, tra gli elementi del termine noto e, se questo è positivo, la soluzione del problema è triviale (ovvero identicamente nulla); in alternativa si avvia la ricerca della soluzione preliminare:
  - cambiando di segno il minimo trovato;
  - sommando questo valore a tutti gli altri elementi del termine noto;
  - assegnando un valore meno uno, a tutti gli elementi della colonna, corrispondente al minimo,

di una matrice quadrata (in origine unitaria), di dimensione pari al numero delle incognite;
- assegnando un valore intero uno e la posizione del minimo a due indicatori scalari (per la modifica, a passi, della soluzione);
- formando poi un indicatore delle incognite e di etichette delle stesse, al momento, tutte uguali ad uno, tranne per la posizione del minimo posta uguale a tre;

- Avvio di un primo ciclo condizionato dal valore del minimo, in ovvia evoluzione nel ciclo stesso, che si arresta, se il valore del minimo è reso negativo.

- Azzeramento di un primo indice condizionante.
- Esecuzione di un test sul primo indicatore scalare, cosicché:

  - se questo è uguale ad uno:

    - si modifica il primo indice condizionante;
    - si assegna il numero intero due ad un terzo indicatore scalere ed il valore del secondo indicatore scalare ad un quarto;
    - si esegue un ciclo, sul numero delle incognite, sottraendo al valore assoluto del minimo trovato il prodotto di una riga della suddetta matrice quadrata per una colonna della matrice originaria del problema lineare complementare, assegnando i valori trovati agli elementi di un vettore di servizio,

  - se questo è uguale a due;

    - si modifica il primo indice condizionante;
    - si assegna il numero intero uno ad un terzo indicatore scalere ed il valore del secondo indicatore scalare ad un quarto;
    - si esegue un ciclo, sul numero delle incognite, assegnando agli elementi di un vettore di servizio gli elementi della colonna della suddetta matrice quadrata, individuata dal quarto indicatore scalare.

- Esecuzione di un secondo test sul primo indice condizionante, cosicché:

  - se questo non è modificato, si procede alla verifica circa l'esecuzione (o meno) di ulteriori passi dell'algoritmo;
  - in alternativa, azzerato un contatore, si azzera un secondo indice condizionante, modificato in corrispondenza del primo elemento positivo del vettore di servizio (questa posizione è altresì assegnata al suddetto contatore);
  - dopodiché si esegue un test su contatore:

    - se è nullo, l'algoritmo termina, in assenza di una soluzione possibile;
    - altrimenti si aggiorna il valore assoluto del minimo con il quoziente, fra il termine noto ed il vettore di servizio, nella posizione del contatore che diventa il nuovo termine base, per proseguire l'algoritmo.

- Avvio di un ciclo condizionato da un terzo indice, in evoluzione nel ciclo, con modifica preliminare dell'indice condizionante (previa azzeramento dello stesso indice), con:

  - incremento del contatore che se minore od uguale al numero delle incognite ed in presenza di un valore positivo nel vettore di servizio, porta al calcolo di un nuovo quoziente, fra il termine noto ed il vettore di servizio, nella posizione del contatore incrementato;

  - ❑ dopodiché se questo quoziente è minore del primo, prende il suo posto e diventa il nuovo termine base, per proseguire l'algoritmo;
  - ❑ comunque a valle di questi tre test, si inizializza poi nuovamente il terzo indice condizionante, chiudendo così il ciclo, governato dallo stesso.

- ❑ Si esegue poi un passo di inversione gaussiana, scegliendo (quale elemento pivotale) il termine base già selezionato, per proseguire l'algoritmo.
- ❑ Si aggiornano i primi due indicatori scalari, cosicché:

  - ❑ il primo assume il valore dell'etichetta del termine base;
  - ❑ il secondo quello del corrispondente indicatore;

- ❑ a loro volta, le etichette e l'indicatore:

  - ❑ del termine base, diventano rispettivamente uguali al terzo ed al quarto indicatori scalari;
  - ❑ del termine base precedente, rispettivamente uguali ad numero intero uno ed al secondo indicatore scalare.

- ❑ Si incrementa il passo d'iterazione e si procede alla verifica circa l'esecuzione (o meno) di ulteriori passi dell'algoritmo, ponendo preliminarmente a zero tutte le incognite con valore negativo e calcolando:

  - ❑ gli scarti residui delle equazioni;
  - ❑ sigma zero, a partire da questi ultimi,

- ❑ ed eseguendo un test sullo stesso che:

  - ❑ se decrementato, dà avvio ad un ulteriore passo dell'algoritmo;
  - ❑ altrimenti conclude l'algoritmo, fornendo così la soluzione del problema lineare complementare.

Passo di inversione gaussiana con pivot [9] per la Subroutine Elone

- ❑ Matrice disegno:

$$a'(i,j)=a(i,j) \quad a(i,in)a(out,j)/a(out,in) \qquad\qquad i \uparrow out\,;\, j \uparrow in$$

$$a'(out,j)=a(out,j)/a(out,in) \qquad\qquad j \uparrow in$$

$$a'(i,in)= \quad a(i,in)/a(out,in) \qquad\qquad i \uparrow out$$

$$a'(out,in)=1/a(out,in)$$

- ❑ Termine noto:

$$b'(i)=b(i) \quad a(i,in)b(out)/a(out,in) \qquad\qquad i \uparrow out$$

[9] A riguardo, si noti come il passo dell'inversione gaussiana con pivot sia sempre lo stesso (con l'inversione del termine pivotale, il quoziente della riga coinvolta e, se trattasi di matrice quadrata, della colonna coinvolta ed una sottrazione di un prodotto – quoziente, per tutti gli altri termini). Le diverse espressioni presentate specializzano solo il passo corrente (dell'inversione gaussiana con pivot) alle esigenze specifiche delle subroutine Elone e Ravindran.

$$b'(out) = b(out)/a(out,in)$$

- Cosiddetto “terzo” vettore:

$$c'(j) = c(j) \quad c(in)a(out,j)/a(out,in) \qquad\qquad j \uparrow in$$

$$c'(in) = \quad c(in)/a(out,in)$$

- Cifra di merito (scalare):

$$d' = d \quad c(in)b(out)/a(in,out)$$

Passo di inversione gaussiana con pivot per la Subroutine Ravindran

- Matrice quadrata di servizio (in origine unitaria):

$$a'(i,j) = a(i,j) \quad a(i\,base,j)s(i)/s(i\,base) \qquad\qquad i \uparrow i\,base$$

$$a'(i\,base,j) = a(i\,base,j)/s(i\,base)$$

- Termine noto:

$$b'(i) = b(i) \quad b(i\,base)s(i)/s(i\,base) \qquad\qquad i \uparrow i\,base$$

$$b'(i\,base) = b(i\,base)/s(i\,base)$$

Sui “metodi” possibili nella ricerca scientifica e tecnologica
I passi della ricerca scientifica e/o tecnologica sono qui elencati e discussi:

- osservare, in modo pressoché casuale, fatti / fenomeni e, da questi, proporre una teoria ingenua;
- verificare sperimentalmente la teoria ingenua, pur senza pretendere di dimostrare alcunché;
- costruire una teoria rigorosa (la più semplice possibile, per sole ragioni di praticità);
- confutare una teoria rigorosa, tramite soli contro-esempi validati;
- e così via, procedendo, non necessariamente, sempre nello stesso ordine.

In questo modo, entrambe le teorie devono soddisfare gli esempi, ma la teoria rigorosa deve anche essere compatibile con le conseguenze. Ad esempio, la teoria geocentrica conferma il moto apparente, giornaliero del sole, ma solo la teoria eliocentrica, oltre spiegare lo stesso moto, con la rotazione terrestre (confermata, tra l’altro, dalle correnti oceaniche, a circolazione ciclonica ed i venti stratosferici), cancella i moti retrogradi dei pianeti e le laboriose spiegazioni, costruite ad hoc, con gli epicicli ed i deferenti.
Invece la teoria flogistica non soddisfa neppure gli esempi (come mostra l’ossidazione dei metalli, ottenuta grazie alla metallurgia), mentre l’invenzione dell’ossigeno (scoperto solo successivamente con la liquefazione dell’aria e la separazione fra ossigeno ed azoto, mentre il riconoscimento dei gas nobili è ancora più tardo) spiega benissimo questi fenomeni e si è dimostrata ricca di conseguenze positive (come ben dimostrato dalla chimica inorganica, organica e biologica).
Tre osservazioni precisano meglio l’intero percorso, adatto sia ai tanti periodi di scienza normale, dove si approfondiscono bene e poi si completano le teorie e/o le tecniche, sia nei periodi, più rari, caratterizzati da rivoluzioni scientifiche e/o tecnologiche. In ogni caso, più è libera la ricerca e, in

generale, più proficui sono anche i suoi sviluppi. Circa poi la semplicità non è certamente ascritta nella realtà, ma è un sensato modo di procedere, passo-passo, diradando l'ignoranza, per migliorare la conoscenza.
Un altro aspetto importante, sottolineato svariate volte dagli storici della scienza, a partire dagli anni Sessanta del '900, è che non si è mai di fronte ad una sola teoria indipendente, ma a vere e proprie costellazioni (o forse anche perturbazioni) di teorie, in grande competizione fra loro, dove talvolta (ed oggigiorno sempre più spesso) principi di incompletezza ed indeterminazione ed assiomi della scelta lasciano aperte certe libertà di procedere. Di conseguenza:

- la casualità è un fattore caratterizzante, essendo difficile (o quantomeno raro) prevedere quello che ancora non si conosce;
- la verifica sperimentale si base sul principio d'induzione ed ovviamente non dimostra alcunché, salvo corroborare l'evidenza, con risultati successivi, tutti positivi;
- la confutazione di una teoria rigorosa si basa ancora sul principio d'induzione, ma solo per validare tutti i contro-esempi che non devono mai contenere anomalie, né errori.

La casualità è quasi certa nei periodi di scienza normale, dove l'approfondimento ed il completamento sono sempre ricercati, ma il cui raggiungimento non è sicuramente garantito e può riservare sorprese, anche notevoli. La casualità è forse meno esclusiva, nei periodi di rivoluzione scientifica e/o tecnologica. In questi casi, una nuova congettura, cioè un'invenzione vera e propria, dopo una confutazione fondata, detta i nuovi paradigmi della ricerca e, almeno per un certo tempo, spesso indica strade quasi obbligate.
A riguardo, tutti gli schemi (così come tutte le classificazioni e, in generale, tutte le teorie) sono poi solo modelli interpretativi che permettono di comprendere realtà, condizionate dal linguaggio, dalla cultura e dalle condizioni, sociali, politiche ed economiche, dei tempi e luoghi, dove sono concepiti, formulati e messi alla prova. La sola alternativa possibile è il silenzio, ma così non si fa alcun passo in avanti e si nega tutta la storia delle società umane.
Un altro aspetto, altrettanto importante, è che qualsiasi teoria scientifica è anche frutto dell'agire sociale e questo ha certamente profondi risvolti epistemologici. D'altra parte, proprio l'essere frutto dell'agire sociale lega strettamente la ricerca scientifica e/o tecnologica alla politica ed all'economia, così come esse si articolano e sviluppano, nel corso della storia degli uomini e delle loro società. E' innegabilmente un appello alla responsabilità individuale e collettiva, oggigiorno poi maggiormente importante, date le enormi potenzialità dei mezzi a disposizione della scienza e della tecnica.

Bibliografia [10]

Domingos P. (2016): L'Algoritmo Definitivo. La macchina che impara da sola e il futuro del nostro mondo. Bollati Boringhieri, Torino.
Khanna P. (2016): Connectography – Le mappe del futuro ordine mondiale. Fazi Ed., Roma.
La Cecla F. (2015): Contro l'urbanistica. La cultura delle città. Einuadi, Torino.
Morin E. (2016): 7 lezioni sul pensiero globale. R. Cortina Ed., Milano.
Rodotà S. (2012): Il diritto di avere diritti. Ed. Laterza, Bari.
Russo L. (2013): L'America dimenticata. I rapporti tra le civiltà e un errore di Tolomeo. A. Mondadori Università, Milano.
Russo L. (2015): La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna. Universale economica Feltrinelli / Saggi, Milano.
Searle J.R. (2016): Vedere le cose come sono. Una teoria della percezione. R. Cortina Ed., Milano.
Stewart I. (2017): Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo. Einaudi, Torino.
Wade D. (2015): Geometria fantastica. I poliedri e l'immaginario artistico nel Rinascimento. Sironi Ed., Milano.

[10] Si rinvia ad altra bibliografia, facilmente reperibile, per i dettagli statistici e numerici.