

## Unione dei geoidi italiano e svizzero con l'utilizzo di dati GOCE: metodologia e risultati

Maddalena Gilardoni (\*), Daniele Sampietro (\*), Mirko Reguzzoni (\*\*)

(\*) DIAR, Politecnico di Milano, Polo Territoriale di Como, via Valleggio 11, 22100 Como, Italia  
maddalena.gilardoni@mail.polimi.it, Tel. 031.332.7529, Fax 031.332.7519

(\*\*) DIAR, Politecnico di Milano, piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italia

### Riassunto

Geoidi locali di nazioni confinanti, oltre ad avere accuratezze e risoluzioni differenti, presentano spesso inconsistenze e/o discontinuità. Queste anomalie sono dovute principalmente ai differenti datum d'altezza utilizzati nella stima dei geoidi locali e ai possibili effetti di bordo presenti nelle aree di confine. Per alcune applicazioni ingegneristiche transfrontaliere l'unione dei geoidi nazionali è quindi necessaria; ovviamente tale unione non può basarsi su una semplice media dei due *dataset* nella zona di sovrapposizione senza tenere in considerazione i bias presenti.

Per risolvere questo problema è possibile sfruttare modelli del campo gravitazionale terrestre stimati da soli dati satellitari, come ad esempio quelli globali derivati dalle osservazioni della missione GOCE dell'Agenzia Spaziale Europea. Questi modelli, non essendo affetti da *bias* locali perché non basati su dati di gravità a terra o di *GPS-levelling*, possono infatti fornire una stima corretta delle basse frequenze dell'ondulazione del geoide (lunghezze d'onda maggiori di 100 km).

La strategia di unione proposta nel presente lavoro si suddivide in due passi: inizialmente, sfruttando il modello globale GOCE, si stimano i *bias* dei due geoidi locali con i minimi quadrati e successivamente si uniscono tali geoidi con una procedura di collocazione. Particolare attenzione è dedicata alla stima della funzione di covarianza del segnale ad alta frequenza e della matrice di covarianza dell'errore del modello GOCE a bassa frequenza.

Nello specifico la procedura è stata implementata per unire i geoidi gravimetrici italiano e svizzero: dopo aver stimato un *bias* complessivo di circa 1 m per l'Italia e di circa 0.8 m per la Svizzera, è stato calcolato tramite collocazione un unico geoide italo-svizzero *unbiased* con un'accuratezza stimata dell'ordine di qualche centimetro. La prima applicazione di questo nuovo geoide, denominato GISgeo2012a (GOCE, *Italian and Swiss geoid*) sarà nell'ambito del progetto *helidem* (*Helvetia-Italy Digital Elevation Model*) per la produzione di un modello digitale del terreno unificato in quote ortometriche.

### Abstract

*Neighbouring countries often have national geoids that do not fit to each other, typically showing a discontinuity along the border. This is mainly due to the different height datum used, producing biased local geoids which can also have different accuracies and spatial resolutions. In addition, each local geoid has its own border effects causing unwanted features. In some applications, for instance in case of international civil engineering, a merging between two neighbouring geoids is necessary. Obviously this procedure cannot be done by simply averaging overlapping areas, completely disregarding biases.*

*To solve this problem the availability of a global geoid coming from satellite data, such as one of the GOCE models or a GOCE-GRACE combined model, can be of great importance. These models in fact are not affected by local biases (local reference systems) since they do not make use of any ground gravity data or levelling. Basically this means that these models can provide the long wavelengths of the resulting merged geoid, in this way removing national biases or other systematic effects. On the other hand, the short wavelengths will directly come from a combination of the available local geoids.*

*The implemented merging strategy is divided into two steps: firstly the biases are estimated using a least squares adjustment and secondly, after removing these systematic effects, the two geoids are merged using a standard collocation. Particular attention is given to the estimate of the covariance function of the high frequency signal and to the covariance matrix of the GOCE model error.*

*In this paper a solution to the problem is initially described from a methodological point of view and then applied to merge the Italian and the Swiss geoid: the estimated bias is of about 1 m for the Italian geoid and of about 0.8 cm for the Swiss one. A merged geoid with an accuracy of few centimetres has been computed by collocation. The first application of this geoid, named GISgeo2012a (GOCE, Italian and Swiss geoid), will be within the interreg project helidem (Helvetia-Italy digital elevation model) for the creation of a unified (in orthometric heights) digital elevation model along the Italian-Swiss border.*

## **Introduzione**

Come ben noto in letteratura i modelli locali di geoidi sono affetti da *bias* (Colombo, 1980; Rummel, Teunissen, 1988; Xu, 1992). Questi sistematismi possono essere dovuti a diverse cause tra cui differenze nel mareografo preso come riferimento, disomogeneità nel sistema di riferimento utilizzato ed effetti di bordo.

I modelli locali di geoidi infatti si basano solitamente su misure di livellazione in combinazione con dati di gravimetria lungo le linee di livellazione stesse in modo tale da poter determinare differenze di potenziale. Il problema presenta ovviamente una deficienza di rango e per passare da differenze di potenziale a potenziale è necessario fissarne il valore in un determinato punto.

La scelta del punto e del valore di potenziale da fissare è sostanzialmente arbitraria ma siccome si vogliono esprimere le altezze in funzione del livello del mare, questo punto viene solitamente determinato in corrispondenza del livello medio del mare osservato da un mareografo scelto. Con tale livello medio viene definita una superficie equipotenziale del campo di gravità terrestre a cui è associato il valore di riferimento del potenziale.

Globalmente esistono differenti datum d'altezza che si riferiscono a superfici equipotenziali diverse (ogni nazione ha il suo mareografo di riferimento, caposaldo di partenza per la rete di livellazione nazionale), e in molti casi visualizzando i geoidi di nazioni confinanti si nota un salto lungo il confine. Questi *bias* devono essere tenuti in considerazione e opportunamente rimossi quando si vuole creare un unico geoidi per più nazioni. La Figura 1 aiuta a comprendere questo concetto.

La procedura qui presentata si avvale dell'utilizzo di modelli globali di gravità *satellite-only* per la stima di questi *bias*. Tali modelli sono omogenei sia per tipo di dato osservato (il metodo di acquisizione è uniforme) sia per distribuzione spaziale che non dipende dalla topografia; inoltre non utilizzando misure di gravità a terra, possono essere considerati privi di *bias* (Gatti et al., 2012; Gerlach, Rummel, 2012).

La procedura presentata per fondere geoidi locali è divisa in due parti. La prima consiste in una stima ai minimi quadrati dei *bias* presenti nei due geoidi e la seconda in una procedura di collocazione standard per la fusione dei due geoidi, ora privi di *bias*, in un'unica soluzione locale sull'area di confine.

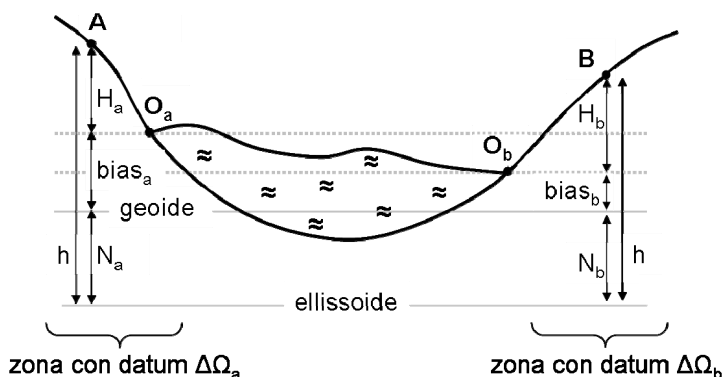


Figura 1. Relazione fra ondulazione del geode ( $N$ ), altezza ellissoidica ( $h$ ) e altezza ortometrica nella zona con datum  $\Delta\Omega_a$  ( $H_a$ ) e  $\Delta\Omega_b$  ( $H_b$ ) per i due capisaldi A e B. La linea tratteggiata rappresenta la superficie equipotenziale passante per i punti  $O_a$  e  $O_b$  presi come origine del datum.  $N_a$  e  $N_b$  sono le corrispondenti altezze di queste superfici sopra l'ellissoide (Figura presa da Gerlach, Rummel, 2012).

### Formulazione matematica del problema

I modelli di geoidi nazionali forniscono l'ondulazione del geode per determinati punti di cui è nota la posizione (latitudine, longitudine) in un dato sistema di riferimento. Questa osservazione può essere considerata scomposta in tre termini: il valore di ondulazione vero (funzione lineare del potenziale anomalo; Moritz, 1967), un bias dovuto a tutti gli effetti presentati nel precedente paragrafo e che per semplicità in questo studio si suppone costante e l'errore d'osservazione.

I modelli globali di gravità invece forniscono una rappresentazione del campo gravitazionale tramite i coefficienti dello sviluppo in serie di armoniche sferiche del potenziale e le relative accuratèzze; lo sviluppo è troncato ad un grado massimo che contraddistingue la risoluzione spaziale del modello globale. A partire dai coefficienti si può calcolare tramite una sintesi armonica il valore del potenziale anomalo, e di conseguenza l'ondulazione del geode, in un qualsiasi punto dello spazio (Heiskanen, Moritz, 1967).

È importante notare che negli ultimi decenni diverse missioni satellitari hanno permesso di conoscere sempre meglio il campo di gravità terrestre. La missione GRACE basata sul principio del *satellite-tracking in low-low mode* (JPL, 1998) ha permesso di conoscere con precisione centimetrica i bassissimi gradi armonici del potenziale (lunghezze d'onda maggiori di circa 160 km). Successivamente il satellite GOCE, lanciato nel 2009, (Drinkwater et al., 2006) misurando le derivate seconde del potenziale tramite un gradiometro di precisione montato a bordo, ha permesso di incrementare la conoscenza anche a frequenze superiori. Questo satellite, che vola ad una quota di circa 260 km, ha permesso infatti di conoscere il geode con un'accuratèzza di 1-2 cm ad una risoluzione di 100 km. Per risoluzioni superiori l'errore di stima risulterebbe maggiore del segnale gravimetrico e di conseguenza non è sensato proseguire nello sviluppo armonico.

Alla base della procedura qui presentata sta un'analisi in frequenza dei segnali sopra descritti: il potenziale anomalo può essere scomposto in una parte a bassa frequenza (fino a grado 200 circa, che equivale a 100 km di risoluzione) e da una parte ad alta frequenza (per risoluzioni superiori).

I modelli locali, calcolati a partire da misure di gravimetria terrestre, contengono un'informazione su tutto lo spettro di frequenza mentre i modelli globali, essendo la serie di armoniche sferiche troncata a un certo grado massimo implicitamente definito dall'accuratèzza e dalla risoluzione dei dati disponibili per la stima del modello, forniscono informazioni accurate solo ai bassi gradi.

Rimuovendo ad un geode locale la componente di bassa frequenza ( $C_{bassa}$ ) data da un modello globale GOCE *satellite-only* (ciò che si sottrae è la sintesi dei coefficienti da grado 0 a grado 200) si

ottiene quindi la somma del bias  $b$  (per definizione a bassissima frequenza), della componente di alta frequenza del geode  $N_{alta}$  e dei vari errori di misura (errore delle osservazioni di GOCE,  $e_{GOCE}$ , propagate al geode e noise del modello locale  $v$ ):

$$N_{res} = N - N_{bassa} = b + N_{alta} + e_{GOCE} + v$$

Si può quindi utilizzare una procedura ai minimi quadrati per stimare il bias incognito  $b$  come:

$$b = (D^T Q^{-1} D)^{-1} D^T Q^{-1} N_{res}$$

$$Q = C_{N_{alta}} + C_{e_{GOCE}} + C_v$$

dove le osservazioni sono date dai residui ( $N_{res}$ ) ottenuti come sopra,  $D$  è la matrice disegno la cui struttura dipende dalla forma del bias che si vuole stimare (ad esempio nel caso si voglia stimare una costante,  $D$  è una matrice di 1) e la matrice dei cofattori  $Q$  tiene in opportuna considerazione la struttura stocastica, vale a dire la matrice di varianza-covarianza, della parte ad alta frequenza del segnale ( $C_{N_{alta}}$ ), dell'errore dei coefficienti del modello globale GOCE-only propagata al geode ( $C_{e_{GOCE}}$ ) e dell'errore del modello locale ( $C_v$ ). Quest'ultimo termine può essere ipotizzato in mancanza di ulteriori informazioni come errore bianco e la sua matrice di varianza e covarianza viene modellizzata come una matrice diagonale in cui i valori sulla diagonale sono tutti uguali alla varianza fornita da chi ha calcolato il modello. È bene precisare che questa ipotesi di rumore bianco è piuttosto forte e poco plausibile poiché nel calcolo del geode locale a partire da dati di anomalia di gravità attraverso le tecniche classiche di geodesia fisica (Albertella et al., 1994) si creano significative correlazioni. La matrice di varianza-covarianza dell'errore di GOCE viene calcolata, nota la relazione fra coefficienti armonici e geode, attraverso la legge di propagazione applicata alla matrice di varianza-covarianza dei coefficienti armonici fornita da chi calcola il modello globale. Infine per la parte ad alta frequenza del segnale, la matrice di varianza e covarianza può essere calcolata a partire da una funzione di covarianza stimata da un variogramma empirico calcolato dai residui dei due geoidi nella parte di sovrapposizione. Per definizione infatti il variogramma (Wackernagel, 2003) è una funzione che non risente delle costanti all'interno dei dati (i *bias* che si vogliono stimare) ed è ragionevole pensare che nella zona di sovrapposizione, a meno di una costante (il cosiddetto *nugget effect* che può essere considerato una stima della varianza dell'errore, ipotizzato bianco, del modello di geode locale), il variogramma empirico calcolato sui residui dell'uno o dell'altro geode abbia la stessa forma.

Una volta stimati con i minimi quadrati, i *bias* vengono rimossi da  $N_{res}$  ottenendo le componenti *unbiased* ad alta frequenza del geode e attraverso una procedura di collocazione standard si predice la componente ad alta frequenza del nuovo geode. Infine sommando alle stime ottenute il contributo a bassa frequenza (da grado 0 a grado 200) del modello globale GOCE-only si ottiene il geode unificato nell'area di confine.

### Caso di studio

La procedura descritta in precedenza è stata utilizzata per unire il geode gravimetrico italiano ITALGEO2005 (Barzaghi et al., 2007) e quello svizzero CHGeo2004 (Martí, 2005) attraverso l'utilizzo del geode GOCE SPW R2 (Migliaccio et al., 2011), ottenuto sintetizzando un modello di gravità globale GOCE-only, precisamente il modello ottenuto a partire dalle osservazioni GOCE attraverso la soluzione *space-wise* (vedi Migliaccio et al., 2004; Reguzzoni, Tselfs 2009).

La Figura 2 mostra i geoidi gravimetrici italiano e svizzero usati per la fusione nell'area di confine. Si è deciso di utilizzare i geoidi gravimetrici e non i geoidi ottenuti anche attraverso il *GPS-levelling* per non introdurre ulteriori problematiche nella combinazione dovute ad esempio al fatto che sulle osservazioni *GPS-levelling* possono essere applicate diverse correzioni ortometriche a seconda del paese. Il geode gravimetrico italiano nell'area di interesse ha una risoluzione di  $3' \times 3'$  e ricopre un'area geografica avente la seguente estensione:  $9^\circ E$ ,  $11^\circ E$ ,  $44.5^\circ N$  e  $47^\circ N$ .

Il geoida gravimetrico svizzero ha una risoluzione iniziale di circa  $30'' \times 30''$  ed è stato sottocampionato per avere la stessa risoluzione del geoida italiano. I limiti dell'area in cui è fornito sono:  $5.9^\circ$  E,  $10.5^\circ$  E,  $45.75^\circ$  N e  $47.8^\circ$  N.

Il *bias* dei due geoida è stato calcolato considerando i residui di 200 punti appartenenti al geoida svizzero e 200 punti appartenenti al geoida italiano (vedi Figura 3, immagine di sinistra). E' utile sottolineare come i punti selezionati siano contenuti all'interno del confine nazionale; infatti la qualità del geoida di una nazione degrada rapidamente una volta attraversato il confine. Il *bias* stimato per il geoida italiano è di circa  $-110$  cm (sigma pari a circa  $5$  cm) mentre quello svizzero è pari a circa  $-83$  cm (sigma pari a circa  $4$  cm).

Successivamente questi *bias* sono stati sottratti ai rispettivi geoida gravimetrici (Figura 2) per ottenere i residui *unbiased* (a meno del modello globale GOCE) da usare come osservazioni del metodo di fusione basato sulla collocazione (Figura 3, immagine di destra).

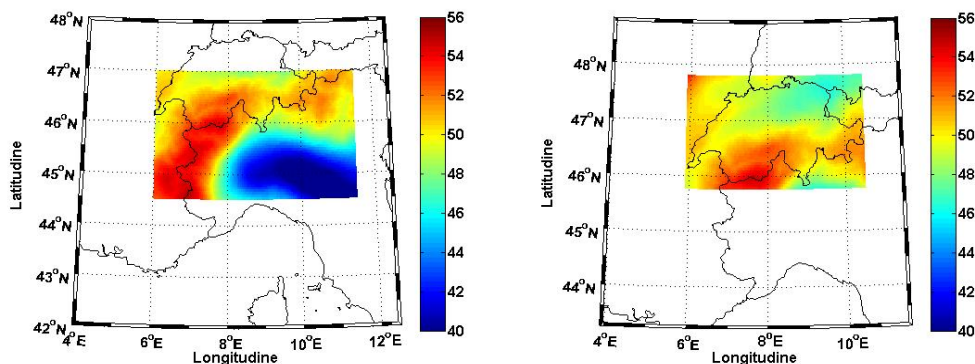


Figura 2. Geoida gravimetrico italiano nella zona di confine (sinistra) e svizzero (destra). L'ondulazione del geoida è espressa in metri.

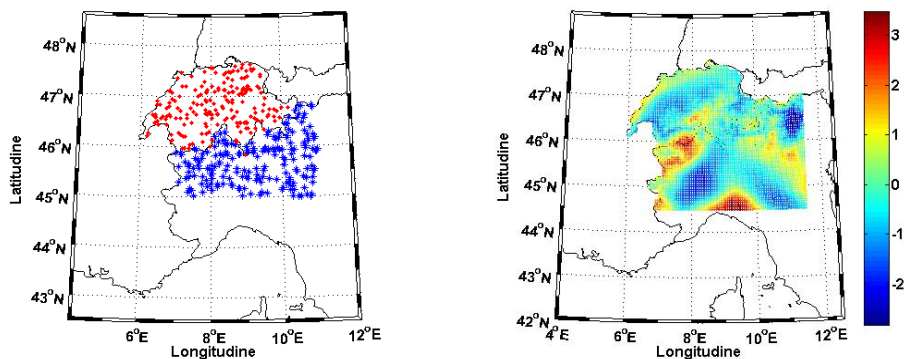


Figura 3. Posizione dei punti utilizzati per la stima dei bias (sinistra) e residui unbiased dei geoida svizzero ed italiano all'interno dei rispettivi confini nazionali in metri (destra).

## Risultati

Il geoida unificato è stato predetto in un'area di interesse definita all'interno del progetto interreg helidem, Helvetia Italy Digital Elevation Model ([www.helidem.eu](http://www.helidem.eu)), nell'ambito del quale è stato sviluppato questo studio, per la conversione da quote ellissoidiche a ortometriche. Più precisamente

il geode unificato è stato predetto nell'area: 9° E, 11° E, 44.5° N e 47° N su una griglia di risoluzione pari a 3' × 3' come rappresentato in Figura 4.

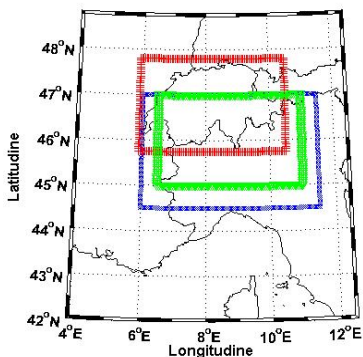


Figura 4. Zona di ricoprimento del geode gravimetrico svizzero CHGeo2004 (rosso), del geode gravimetrico italiano ITALGEO2005 sull'area di confine (blu), del geode unificato GISgeo2012a.

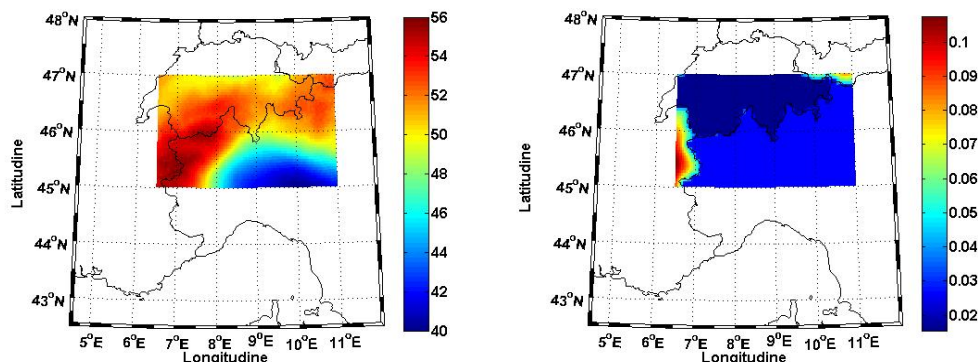


Figura 5. Geode stimato sull'area di sovrapposizione italo-svizzera GISgeo2012a (a sinistra) e relativo errore di stima (a destra) espresse in metri.

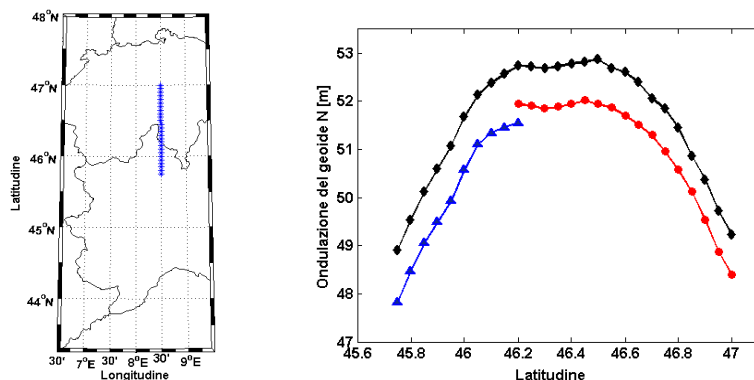


Figura 6. Profilo considerato (a sinistra) e connessione fra geode italiano ITALGEO2005 (triangoli blu) e svizzero CHGeo2004 (cerchi rossi) prima e dopo l'unificazione (rombi neri).



In Figura 5 sono riportati il geode unificato predetto sull'area di confine italo-svizzera (denominato GISgeo2012a) e il suo errore di predizione.

In Figura 6 si può vedere come per un determinato profilo, corrispondente ad una longitudine di 8.5° E, il salto presente inizialmente fra geode italiano (ITALGEO2005) e svizzero (CHGeo2004) sia stato eliminato attraverso la stima del geode *unbiased*.

Il geode predetto è stato validato considerando i dati disponibili di *GPS-levelling* della rete di livellazione svizzera (visibile in Figura 7, immagine di sinistra), forniti dal Dr. Urs Marti dell'Ufficio Federale di Topografia SwissTopo. In particolare per una serie di coppie di punti P e Q (vedi Figura 7, immagine di destra) è stata calcolata la differenza  $\Delta$  fra le variazioni di geode ottenute dal *GPS-levelling* e quelle ottenute dal modello locale di geode

$$\Delta = [N_{GPS}(P) - N_{GPS}(Q)] - [N_{modello}(P) - N_{modello}(Q)].$$

Il confronto fra le statistiche ottenute utilizzando il modello gravimetrico originale svizzero e quello unificato sono riportate in

Tabella 8.

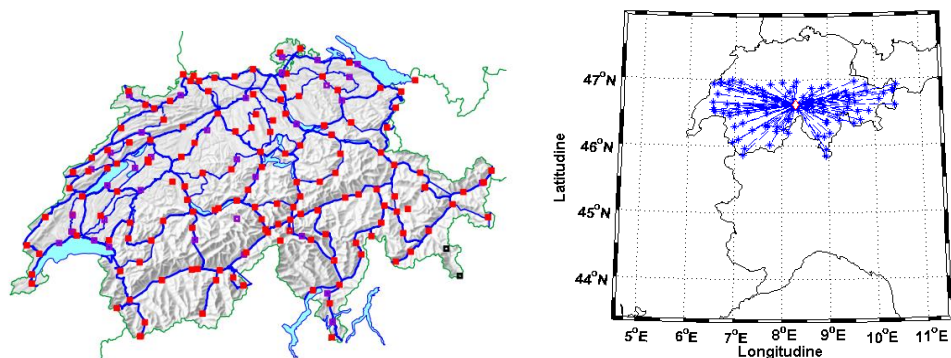


Figura 7. Rete di livellazione GPS utilizzata per la validazione (sinistra) e schema di rete (a stella, per considerare solo coppie indipendenti) per la valutazione della differenza fra variazioni di geode ottenute dal *GPS-levelling* e dai modelli locali (destra).

Statistiche	Geode CHGeo2004	Geode GISgeo2012a
Min	-2.67	-19.67
Max	16.63	8.13
Media	5.47	2.02
RMSE	0.4	0.3

Tabella 8. Statistiche inerenti alle differenze di variazioni di ondulazione del geode fra modello di geode e dati di *GPS-levelling*.

## Conclusioni

Questo lavoro rappresenta uno studio preliminare sull'utilizzo dei dati GOCE per l'unificazione del datum d'altezza a livello locale. I risultati ottenuti sono buoni nonostante ci siano significativi margini di miglioramento. Il *bias* di ciascun geode è stato approssimato ad una costante mentre ha forma più complessa, per esempio costante più altri tre parametri per tener conto dei diversi sistemi di riferimento anche planimetrici (Heiskanen, Moritz, 1967). L'implementazione di questa modellizzazione più accurata sarà oggetto di sviluppi futuri.

### **Ringraziamenti**

Questo studio è stato finanziato nell'ambito del progetto interreg helidem (Helvetia Italy Digital Elevation Model).

Si ringraziano il Dr. Urs Marti (Ufficio Federale di Topografia SwissTopo) e il Prof. Riccardo Barzaghi (Politecnico di Milano) per avere fornito i geoidi gravimetrici di dominio non pubblico.

### **Riferimenti bibliografici**

- Albertella A, Forsberg R, Rapp R. H, Pavlis N. K, Sansò F, Sideris M. G, Tscherning C.C. (1994). "International School for the Determination and Use of the Geoid, Lecture Notes". International Geoid Service, DIAR-Politecnico di Milano, Sansò F. Editore.
- Barzaghi R, Borghi A, Carrion D, Sona G. (2007). "Refining the estimate of the Italian quasigeoid". *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 3, 2007.
- Colombo O. L. (1980). *A world vertical network*. Report 296. Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Ohio.
- Drinkwater M.R, Haagmans R, Muzi D, Popescu A, Floberghagen R, Kern M, Fehring M. (2006). "The GOCE gravity mission: ESA's first core Earth explorer", *Proceedings of the third International GOCE User Workshop, 6-8/11/2006*, Frascati, Italy.
- Gatti A, Reguzzoni M, Venuti G. (2012). "The height datum problem and the role of satellite gravity models", *Journal of Geodesy*, DOI: 10.1007/s00190-012-0574-3.
- Gerlach C, Rummel R. (2012). "Global height unification with GOCE: a simulation study on the indirect bias term in the GBVP approach", *Journal of Geodesy*, DOI: 10.1007/s00190-012-0579-y.
- JPL (1998). *GRACE Science and Mission Requirements Document (SMRD)*. GRACE327-200 JPL D-15928.
- Heiskanen W. A, Moritz H. (1967). *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco.
- Marti U. (2005). "Comparison of high precision geoid model in Switzerland". *Dynamic Planet*, Tregonig P. e Rizos C. Editore, 377-382.
- Migliaccio F, Reguzzoni M, Sansò F. (2004). "Optimal multi-step collocation: application to the space-wise approach for GOCE data analysis". *Journal of Geodesy*, DOI: 10.1007/s00190-004-0396-z.
- Migliaccio F, Reguzzoni M, Gatti A, Sansò F, Herceg M. (2011). "A GOCE-only gravity field model by the space-wise approach". *Proceedings of the fourth International GOCE User Workshop, 31/03/2011-1/04/2011*, Monaco, Germania.
- Reguzzoni M, Tselfes N. (2009). "Optimal multi-step collocation: application to the space-wise approach for GOCE data analysis". *Journal of Geodesy*, DOI: 10.1007/s00190-008-0225-x.
- Rummel R, Teunissen P. (1988). "Height datum definition, height datum connection and the role of geodetic boundary value problem". *Bulletin Geodesique* 62 (4): 477-498.
- Wackernagel H. (2003). *Multivariate geostatistics: an introduction with applications*. Springer Verlag, Berlino.
- Xu P. (1992). "A quality investigation of global vertical datum connection". *Geophysical Journal International*, DOI: 10.1111/j.1365-246X.1992.tb00880.x.