

Mapping function troposferiche e loro effetti sulla stima GNSS

Simone Paternostro (*), Massimiliano Chersich (**),
Davide Curone (**), Marco Osmo (**)

(*) EADS Astrium GmbH, Claude-Dornier-Str., 88090 Immenstaad, Germany, 328 9045161
Simone.Paternostro@astrium.eads.net

(**) Galileian Plus s.r.l., c/o EUCENTRE, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, 0382-524482,
mchersich@galileianplus.it; dcurone@galileianplus.it; mosmo@galileianplus.it

Riassunto

La componente verticale della posizione di ricevitori permanenti GNSS viene determinata a un livello di precisione che, rispetto alla componente planimetrica, mostra oltre un fattore 2 di degrado. D'altra parte, alcune applicazioni scientifiche richiedono la determinazione della quota con una precisione di pochi millimetri. Uno dei fattori limitanti la precisione ottenibile in quota è l'impatto del ritardo troposferico, ovvero il ritardo dovuto alla rifrazione del segnale GNSS negli strati bassi e neutri dell'atmosfera soprattutto in ambienti, come quello di montagna, dove il dislivello tra le stazioni della rete, e quindi le differenze di pressione, umidità e temperatura, giocano un ruolo fondamentale. Scopo di questo lavoro è mostrare il livello di prestazioni raggiungibile sulla stima delle coordinate, ed in particolare sulla quota, attraverso l'impiego di recenti metodi di Mapping Function troposferica presenti in letteratura mediante il confronto con uno dei metodi di trattamento del ritardo troposferico più diffusi. L'approccio utilizzato si basa sul confronto della ripetibilità delle coordinate tratte da serie storiche di alcuni giorni di durata utilizzando due stazioni poste a circa 300Km di distanza, una scala di distanza tipica per applicazioni di monitoraggio geodetico GNSS di precisione, e al variare della maschera angolare di elevazione. Tutti i risultati presentati sono stati calcolati a partire dalle stime GNSS delle coordinate utilizzando il software NDA Professional (NDA).

Abstract

The vertical components of permanent GNSS receiver positions presents a degradation factor that is more than twice respect to planimetric component. On the other hand, some scientific applications demand a precision of few millimetres to evaluate altitude. One of the most limiting factors for altitude estimation is the tropospheric delay, due to the GNSS signal refraction in the lower neutral layers of the atmosphere, especially for network stations that present a significant difference in altitude and so the difference in pressure, temperature and humidity plays a fundamental role. The purpose of this project is to evaluate the performances that it is possible to reach comparing some new developed Mapping Functions with one of the most widely diffuse tropospheric delay model. The basic approach used is to compare the coordinates repeatability coming from a time serie of some days length of two stations placed at 300Km distance, a typical distance scale for high precision GNSS geodetic monitoring applications, and by using different elevation cut-off angle. All the presented results have been obtained from the GNSS coordinate estimation performed by NDA Professional software (NDA).

Introduzione

Il ritardo troposferico è una delle componenti del ritardo del segnale GPS non completamente predicibile da modello, data la sua dipendenza non solo dalla posizione geografica ma soprattutto

dai parametri locali di temperatura, pressione N_{0h} e umidità che presentano apprezzabili variazioni nei loro valori sia nel tempo che nello spazio. L'utilizzo di modelli è tuttavia necessario per rimuovere dai dati la parte meglio predicibile e meno sensibile alle condizioni atmosferiche locali, e per preparare la stima del restante residuo di ritardo troposferico.

L'approccio comunemente impiegato nell'analisi dati GNSS per applicazioni geodetiche prevede la scomposizione del ritardo complessivo in due componenti: la componente idrostatica, o secca, e la componente umida. Quest'ultima è quella meno predicibile da modello e dipendente, principalmente, dal contenuto di vapore acqueo in atmosfera. Entrambe queste componenti vengono ulteriormente scomposte in una parte dovuta agli strati di atmosfera direttamente sopra la stazione (le componenti zenitali dei due ritardi, quello secco, o *Zenith Hydrostatic Delay* [ZHD], e quello umido, o *Zenith Wet Delay* [ZWD]) e moltiplicate ognuna da un fattore di *Mapping Function* (MF): la MF idrostatica [mf_h] e la MF umida [mf_w]. Le MFs hanno lo scopo di tenere in conto del percorso non rettilineo di attraversamento dell'atmosfera da parte del segnale. Il modello del ritardo troposferico T risulta pertanto descritto in questo modo:

$$T = ZHD * mf_h + ZWD * mf_w \quad [1]$$

Nei primi anni della geodesia spaziale, il ritardo allo zenit e le MFs non erano chiaramente separate ma tale separazione è risultata funzionale allo sviluppo di strategie efficaci per la stima delle coordinate in applicazioni ad alta precisione. Come regola generale, inoltre, le MFs hanno come ipotesi alla base la simmetria dell'atmosfera rispetto all'angolo di azimut e l'equilibrio idrostatico.

L'analisi effettuata ha visto l'impiego dei seguenti modelli: due diversi modelli per il calcolo del ritardo troposferico allo zenit, i modelli di Saastamoinen (Saastamoinen, 1973) e Hopfield (Hopfield, 1969); sedici modelli di MF che verranno brevemente descritte di seguito e due modelli di ritardo troposferico totale (*Total Slant Delay*, TSD), quelli di Saastamoinen (Saastamoinen, 1973) e Hopfield modificato (Goad, Goodman 1974), che, incorporando direttamente la dipendenza dall'angolo di elevazione del satellite, non necessitano di proiezione attraverso l'uso di MF.

Modelli di ritardo troposferico testati

Il ritardo troposferico complessivo allo zenit (*Zenith Tropospheric Delay*, ZTD) viene definito come l'integrale del profilo di rifrattività lungo la verticale locale che in molti modelli viene considerata divisa in componente idrostatica e non idrostatica:

$$ZTD = 10^{-6} \int_{h_e}^{\infty} N(h) dh = 10^{-6} \int_{h_e}^{\infty} (N_h(h) + N_w(h)) dh = d_h^Z + d_w^Z = ZHD + ZWD \quad [2]$$

La soluzione dipende quindi dal modello di rifrattività $N(h)$ impiegato e i modelli di Saastamoinen (Saastamoinen, 1973) e Hopfield (Hopfield, 1969) per il ritardo troposferico allo zenit portano alle seguenti relazioni:

- Saastamoinen:
$$ZTD = \frac{0.002277}{1 - 0.0026 \cos(2\varphi) - 0.00028 h_0} \left[P_0 + \left(\frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) e_0 \right] \quad [3]$$

- Hopfield:
$$ZTD = \frac{10^{-6}}{5} \{ N_{0h} [40136 + 148.72(T - 273.16)] + 11000 N_{0w} \} \quad [4]$$

dove per e_0 e N_{0w} sono state scelte le relazioni date da Thayer (Thayer, 1974) che contengono la dipendenza dai parametri atmosferici: pressione P_0 , pressione parziale del vapore acqueo e_0 e temperatura T_0 . Tra i due modelli si può già notare una sostanziale differenza data dal fatto che il modello di Saastamoinen considera anche l'influenza della posizione geografica della stazione ricevente ed in particolare la sua latitudine φ e quota h_0 .

Quando il segnale GNSS giunge al ricevitore da un satellite che non si trova allo zenit, occorre considerare il ritardo introdotto dall'incurvamento del segnale nell'atmosfera.

Ipotizzando ancora che la rifrattività N sia funzione della sola quota h , l'espressione per il TSD può essere scritta come:

$$TSD = d_{na}^S = 10^{-6} \int_{h_e}^{\infty} N ds = 10^{-6} \int_{h_e}^{\infty} N \frac{ds}{dr} dr \quad [5]$$

dove $\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\cos(z)} = \sec(z)$, z è l'angolo di zenit in un arbitrario strato infinitesimo, e ds il cammino seguito dal segnale.

Applicando la legge di Snell in coordinate sferiche l'integrale [5] può essere riscritto come:

$$d_{na}^S = 10^{-6} \int_{r_0}^{\infty} \frac{N(r)r}{r_0} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - \sin^2(z_0) \right]^{\frac{1}{2}} dr \quad [6]$$

In generale tale integrale può essere calcolato in forma chiusa, piuttosto complessa, o con altri diversi metodi.

Il modello di Saastamoinen per il TSD (Saastamoinen, 1973) consiste nello sviluppare un'espansione di Taylor del termine $\sec(z)$ per poi integrare i diversi termini separatamente giungendo alla seguente relazione:

$$d_{na}^S = 0.002277(1 + D) \sec(z_0) \left[P_0 + \left(\frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) \epsilon_0 - B \tan^2(z_0) \right] + \delta_r \quad [7]$$

Il modello di Hopfield per il TSD, denominato anche "Hopfield modificato", si basa su un'espansione in serie dell'integrando proposta in (Remondi, 1984), in modo da ottenere:

$$d_{na}^S = 10^{-6} N_{0i} \left[\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_{k,i}}{k} r_i^k \right] \quad [8]$$

Dove l'indice i indica le componenti idrostatica (con $i = h$) e non idrostatica (con $i = w$). Per il significato dei vari termini si rimanda al relativo documento (Goad, Goodman, 1974).

Mapping Functions testate

Negli ultimi trent'anni sono state sviluppate molte MF, la maggior parte delle quali appartengono a uno dei due grandi gruppi seguenti:

- Il primo riguarda MF basate sul profilo Two-Quartic sviluppato da Hopfield (Hopfield, 1969) e di questo gruppo sono state selezionate per la nostra analisi le seguenti mapping function (per le relazioni e i valori numerici dei coefficienti si rimanda ai relativi riferimenti):
 - **Hopfield modificato** (paragrafo precedente)
 - **Moffet** (Moffet, 1973): nasce dalla semplificazione di quella utilizzata da Hopfield nel suo modello e pertanto nella letteratura spesso viene attribuita a lui. È funzione del solo angolo di elevazione ϵ .
 - **Black** (Black, 1978): consiste in forme analitiche derivate dall'integrazione di un'espansione in serie di Taylor dell'integrale normalizzato ottenuto tramite considerazioni geometriche.
 - **Black and Eisner** (Black, Eisner, 1984): nasce da una modifica di quelle di Black ed espresso come un semplice modello geometrico dipendente dal solo angolo di elevazione ϵ .
- Il secondo gruppo è costituito da MF basate su forme troncate di frazioni continue, di cui la prima definizione fu data in (Marini, 1972):

$$mf(\varepsilon) = \frac{1}{\sin(\varepsilon) + \frac{a}{\sin(\varepsilon) + \frac{b}{\sin(\varepsilon) + \frac{c}{\sin(\varepsilon) + \dots}}}} \quad [9]$$

di cui però esistono diverse varianti e i coefficienti a , b , e c possono essere costanti o funzioni lineari, calcolate attraverso l'analisi di dati di profili medi di rifrattività, in genere ottenuti mediante radiosonde; ε rappresenta l'elevazione del satellite.

Appartenenti a questo gruppo sono state scelte le seguenti mapping function (si rimanda ai relativi riferimenti per le relazioni e i valori numerici):

- **Chao** (Chao, 1972): la frazione continua è troncata al termine del secondo ordine nel quale è posto il termine $\tan(\varepsilon)$ invece del $\sin(\varepsilon)$. I coefficienti sono costanti numeriche ricavate dal fitting di profili medi di rifrattività di due anni di raccolta dati attraverso radiosonde.
- **Davis** (Davis et al., 1985): frazione continua troncata al terzo ordine, con la tangente introdotta come in Chao. La sostituzione con la tangente però diminuisce le prestazioni per angoli di elevazione alti (20° - 60°), in quanto la tangente non ha lo stesso andamento del seno, portando ad un errore di 1-2 mm. I coefficienti derivano dall'analisi di dati raccolti con il ray tracing, sfruttando un modello ideale di atmosfera, fino ad angoli di elevazione pari a 5° . Questa mapping function è stata sviluppata per la sola componente idrostatica, ma può essere utilizzata anche per calcolare la componente non-idrostatica, introducendo però un "piccolo" errore di cui però non si conosce la magnitudine.
- **Ifadis** (Ifadis, 1986): frazione continua troncata al terzo ordine e normalizzata all'unità allo zenit, sviluppata attraverso una vasta selezione di profili atmosferici determinati da radiosonde sparse su tutto il globo.
- **Herring** (Herring, 1992): frazione continua troncata al terzo ordine e normalizzata all'unità allo zenit, conosciuta come *Mapping Temperature Test* (MTT), determinata dal ray tracing attraverso profili ottenuti da radiosonde che hanno coperto diversi luoghi degli Stati Uniti, per angoli di elevazione che partono dai 3° .
- **Niell** (Niell, 1996): frazione continua troncata al terzo ordine e normalizzata all'unità allo zenit, non presenta dipendenza diretta di uno specifico parametro meteorologico, ma è basata su fluttuazioni temporali della massa dell'atmosfera. I coefficienti sono stati determinati sfruttando i profili del U.S. Standard Atmosphere Supplements, 1966.
- **Global Mapping Function (GMT)** (Boehm et al., 2006): frazione continua troncata al terzo ordine e normalizzata all'unità allo zenit con il termine correttivo per la quota come nella MF di Niell (solo per la componente idrostatica), i cui coefficienti a_i però sono stati calcolati utilizzando i dati raccolti dall'ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) in 40 anni su una griglia mondiale $15^\circ \times 15^\circ$ (determinando profili medi mensili di pressione, temperatura e umidità) e le armoniche sferiche, mentre per i coefficienti b_i e c_i si sono utilizzate le espressioni e i valori utilizzati per la Vienna Mapping Function (VMF1).
- **UNSW931** e **UNSW932** (Yan, Ping, 1995) costituiscono una variante della frazione continua in quanto si basano su funzioni d'errore complementari. La prima si basa sul profilo atmosferico utilizzato anche dal modello di Davis, (parametri atmosferici standard); la seconda si basa sul profilo atmosferico dato dal modello di Hopfield. Entrambi i modelli sono stati ideati per il calcolo della componente idrostatica, l'utilizzo per la componente non idrostatica introduce un errore.
- **UNBabc** e **UNBab** (Langley, Guo, 2003): frazione continua troncata al terzo ordine per UNBabc, al secondo per UNBab e normalizzate all'unità allo zenit. I coefficienti sono stati determinati dopo cinque anni di analisi di profili ottenuti mediante radiosonde lanciate due volte al giorno da 51 differenti stazioni sparse per tutto il Nord America.
- **FCULa** e **FCULb** (Mendes et al., 1999): frazioni continue troncate al terzo ordine e normalizzate all'unità allo zenit. I coefficienti sono stati sviluppati sul ray tracing di un anno

di dati raccolti mediante il lancio di radiosonde da 180 stazioni sparse nel mondo, con anche più lanci giornalieri per raccogliere i profili di pressione, temperatura e umidità relativa.

Tutte le MF sopra descritte sono state impiegate nell'elaborazione dati GNSS i cui risultati sono presentati di seguito. Le MF sono state infatti introdotte nei modelli di calcolo del ritardo troposferico implementati nel software NDA (Chersich, 2002), uno strumento per la compensazione di dati GNSS per applicazioni geodetiche di precisione, interamente sviluppato da Galileian Plus, il cui utilizzo in applicazioni scientifiche è stato recentemente validato (Fermi, 2010) e certificato dal Politecnico di Milano – DIAR.

Per trattare il ritardo troposferico, NDA utilizza la [1] e impiega, per la parte del ritardo troposferico idrostatica e a seconda della scelta dell'utente, i soli modelli di ZTD di Saastamoinen e Hopfield, proiettandoli con la Mapping Function di Niell oppure il TSD di Saastamoinen. La componente umida del ritardo troposferico zenitale viene, invece, stimata sulle doppie differenze della combinazione *Ionospheric-free* di fase in maniera lineare a tratti, su intervalli di 1.5 ore, per entrambe le stazioni ai capi della linea di base utilizzando la MF di Niell umida per ricavarne l'impatto complessivo. A seguito di questo lavoro, NDA è in grado di utilizzare tutte le Mapping Function descritte in precedenza in quanto la loro implementazione nel codice è stata eseguita e testata (Paternostro, 2012). L'analisi presentata di seguito utilizza tutti i modelli descritti ed è stata effettuata su una linea di base MATE-ITRA, lunga circa 300Km, che collega le due stazioni GNSS di Matera (*reference*) e Roseto degli Abruzzi, utilizzando angoli di *cut-off* di 10° e poi 5°. Di seguito mostriamo le ripetibilità ottenute da una serie storica di 16 giorni con stima giornaliera delle coordinate.

Di seguito si riporta una tabella riassuntiva delle dipendenze dei coefficienti dei modelli dai parametri e relativa legenda:

Modello	Parametri							
	ε	P	e	T	h	Φ	λ	DoY
Moffett	x							
Black	x			x	x			
Black-Eisner	x							
Chao	x							
Davis	x	x	x	x				
Ifadis	x	x	x	x				
Herrings	x			x	x	x		
Niell	x				x	x		x
UNSW931	x	x	x	x				
UNSW932	x	x	x	x				
UNBabc	x				x	x		
UNBab	x				x	x		
GMT	x					x	x	x
FCULa	x			x	x	x		
FCULb	x				x	x		x

- ε = angolo di elevazione
- P = pressione totale
- e = pressione parziale di vapore
- T = temperatura
- h = quota stazione
- φ = latitudine stazione
- λ = longitudine stazione
- DoY = giorno dell'anno

Per le unità di misura occorre fare riferimento ai relativi testi.

Tabella 1. Dipendenza delle mapping function dai parametri.

Risultati, grafici e tabelle

Sono stati attribuiti degli indici numerici ai modelli implementati in NDA per semplificare la visualizzazione grafica dei risultati; la seguente Tabella 2 ne riporta i valori:

<i>Indice numerico</i>	Modello di ZTD		<i>Indice numerico</i>	Modello di ZTD	
Mapping Functions	<i>Saastamoinen</i>	<i>Hopfield</i>	Mapping Functions	<i>Saastamoinen</i>	<i>Hopfield</i>
<i>Saastamoinen TSD</i>	1	/	<i>Niell</i>	10	25
<i>Hopfield Modificato</i>	/	2	<i>UNSW931</i>	11	26
<i>Moffet</i>	3	18	<i>UNSW932</i>	12	27
<i>Black</i>	4	19	<i>UNBabc</i>	13	28
<i>Black and Eisner</i>	5	20	<i>UNBab</i>	14	29
<i>Chao</i>	6	21	<i>GMT</i>	15	30
<i>Davis</i>	7	22	<i>FCULa</i>	16	31
<i>Ifadis</i>	8	23	<i>FCULb</i>	17	32
<i>Herring</i>	9	24			

Tabella 2. Assegnazione indici per le varie combinazioni di modelli.

In Grafico 3 sono riportati gli andamenti delle ripetibilità (deviazione standard σ della distribuzione) delle stime ottenute per il Modulo e le componenti Up, Nord ed Est della linea di base MATE-ITRA considerata, stime ottenute impiegando un angolo di cut-off di 10°.

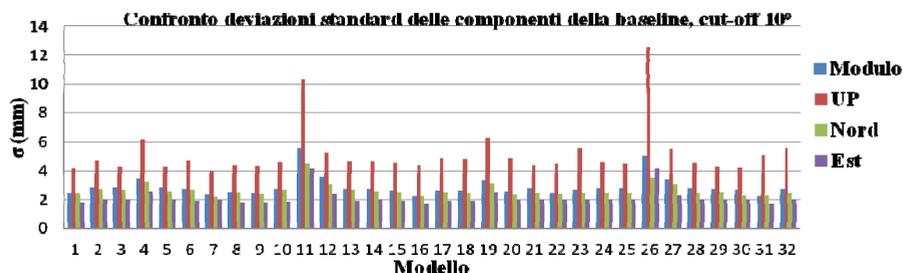


Grafico 3. Deviazioni standard relative al modulo e alle tre componenti della linea di base, per angoli di cut-off pari a 10°.

Nella seguente Tabella 4, sono stati riportate le deviazioni percentuali dei modelli che hanno dimostrato le migliori prestazioni rispetto al modello di **Saastamoinen TSD**, modello assunto qui come modello di riferimento per gli altri:

Modello	$\Delta\sigma$ (%)			
	Modulo	UP	NORD	EST
7	5,19	6,57	10,32	7,53
9	0,80	3,60	0,73	1,06
16	10,81	3,82	10,23	2,96
31	10,62	17,38	5,73	4,21

Tabella 4. Dal Grafico 3, le differenze percentuali rispetto al modello TSD di Saastamoinen (in nero l'incremento di prestazioni vs. modello, in rosso il decremento prestazioni vs. modello).

Il modello 7 è l'unico che presenta un miglioramento nella stima della componente UP per angoli di elevazioni maggiori ai 10°. La situazione cambia per cut-off inferiori. Analogamente a Grafico 3, in Grafico 5 sono riportati gli stessi andamenti delle deviazioni standard per un angolo di cut-off di 5° e nella successiva Tabella 6 sono riportati i modelli che hanno dimostrato le migliori prestazioni (in termini di percentuali) rispetto al modello base.

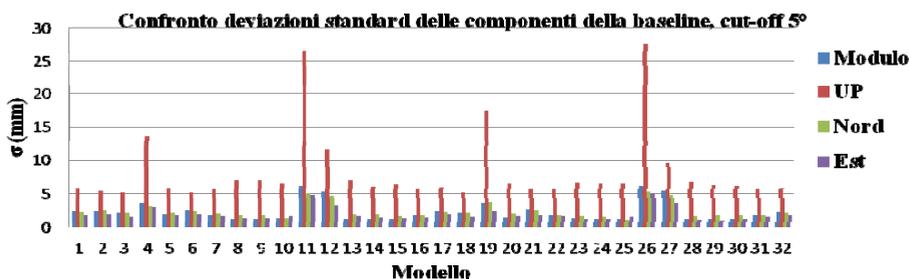


Grafico 5. Deviazioni standard relative al modulo e alle tre componenti della baseline, per cut-off angle pari a 5°.

Modello	$\Delta\sigma$ (%)			
	Modulo	UP	NORD	EST
3	10,67	17,05	6,13	7,60
7	29,88	4,58	15,22	5,12
16	27,52	3,16	26,86	15,58
18	12,85	16,01	4,13	12,25
22	33,39	7,15	26,53	4,65
31	29,28	6,26	29,64	12,12

Tabella 6. Dal Grafico 5, le differenze percentuali rispetto al modello TSD di Saastamoinen.

Questi sei modelli presentano un miglioramento delle prestazioni su tutte e quattro le misure della baseline, con percentuali per niente trascurabili.

Conclusioni

Dall'analisi effettuata si è riscontrato che per angoli di elevazione maggiori di 10° il modello di TSD di Saastamoinen risulta essere uno dei modelli più efficienti, in termini di ripetibilità delle coordinate, ma per angoli minori le sue prestazioni degradano, a dimostrazione di una scarsa capacità di modellare il ritardo troposferico per bassi angoli di elevazione.

Alcuni dei modelli recentemente introdotti in NDA Professional, infatti, hanno permesso di ottenere precisioni superiori rispetto al modello di riferimento utilizzato migliorando le ripetibilità delle coordinate soprattutto se si includono le osservazioni per bassi angoli di elevazione.

Complessivamente, per *cut-off* in elevazione a 5° e in planimetria, le ripetibilità delle componenti Nord e Est passano, mediamente, da 2-3 mm per angoli di elevazione maggiori di 10°, ai 1-2 mm e la componente UP migliora sensibilmente utilizzando la MF di Moffet con entrambi i modelli di ZTD considerati.

Riferimenti

Bisnath, S.B., V.B. Mendes and R.B. Langley (1997). "Effects of tropospheric mapping functions on space geodetic data", Proceedings of the IGS Analysis Center Workshop.

Black, H.D. (1978). "An easily implemented algorithm for the tropospheric range correction", Journal of Geophysical Research, Vol. 83, No. B4, pp. 1825-1828.

Black, H. D. and A Eisner (1984). "Correcting satellite Doppler data for tropospheric effects", Journal of Geophysical Research, Vol. 89, No. D2, pp. 2616-2626.

Boehm, J., A. Niell, P. Tregoin, and H. Schuh (2006). "Global Mapping Function (GMF): A new empirical mapping function based on numerical weather model data", Geophysical Research Letters, vol.33.

- Chersich M., De Giovanni A., Osmo M. (2002) “*NDA: un tool italiano per il processamento automatico di dati da reti GPS permanenti*”, Atti della 6^a Conferenza Nazionale ASITA, Perugia 5-8 Novembre 2002.
- Chao, C.C. (1972). "*A model for tropospheric calibration from daily surface and radiosonde balloon measurement*", Technical Memorandum 391-350, JPL, Pasadena, Calif.
- Davis, J.L., T.A. Herring, I.I. Shapiro, A.E.E Rogers, and G. Elgered (1985). “*Geodesy by radio interferometry: effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length*”, Radio Science, Vol. 20, No. 6, 1593-1607.
- Fermi M., Caldera S., Chersich M., Osmo M., “*Validazione del software NDA Professional per la compensazione di reti di stazioni permanenti GNSS*”, Atti 14^a Conferenza Nazionale ASITA, 9 – 12 novembre 2010, Fiera di Brescia.
- Goad, C. C. and L. Goodman (1974). "*A modified Hopfield tropospheric refraction correction model*", Paper presented at the AGU Fall Annual Meeting, 12-17 December 1974, San Francisco, Calif.
- Guo, J. and R. B. Langely (2003). "*A New Tropospheric Propagation Delay Mapping Function for Elevation Angles Down to 2 degrees*", ION GPS 2003, 9-12 Sept. 2003, Portland OR.
- Herring, T.A. (1992). "*Modeling atmospheric delays in the analysis of space geodetic data*", Proceedings of Symposium on Refraction of Transatmospheric Signals in Geodesy, Publications on Geodesy, Delft, The Netherlands, No. 36, New Series, pp. 157-164.
- Hopfield, H.S. (1969). "*Two-quartic tropospheric refractivity profile for correcting satellite data*", Journal of Geophysical Research, Vol. 74, No. 18, pp. 4487-4499.
- Ifadis, I. (1986). "*The atmospheric delay of radio waves: Modeling the elevation dependence on a global scale*", Technical Report No. 38L, School of Electrical and Computer Engineering, Chalmers University of Technology, Goteborg.
- Ifadis, I. (1 993). "*Space to earth techniques: some considerations on the zenith wet path delay parameters*", Survey Review, Vol. 32, No. 249, pp. 130-144.
- Marini, J.W. (1972). "*Correction of satellite tracking data for an arbitrary tropospheric profile*", Radio Science, Vol. 7, No.2, pp. 223-231.
- Mendes V.B., Pavlis E.C., Prates G., Pavlis D. E. and Langley R.B.(2002), “*Improved mapping functions for atmospheric refraction correction*”, Geophysical Research Letters, vol. 29.
- Moffett, J.B. (1973). "*Program requirements for two-minute integrated Doppler satellite navigation solution*", Technical Memorandum TG 819-1 (rev. 2), The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory, Silver Spring, Md.
- Niell, AE. (1996). "*Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths*", Journal of Geophysical Research, Vol. 101, No. B2, pp. 3227-3246.
- Paternostro S. (2012), "*Effetto di diversi modelli di mapping function troposferica sulle prestazioni di un software di compensazione di dati GPS*", Tesi di Laurea, Facoltà di Ingegneria Spaziale, Università "La Sapienza" di Roma.
- Remondi, B. W. (1984), "*Global Positioning System Carrier Phase: Description and Use*", Journal of Geodesy, Volume 59, Number 4 (1985), 361-377.
- Saastamoinen, J. (1973). “*Contributions to the theory of atmospheric refraction, part II: refraction corrections in satellite geodesy*”, Bulletin Géodésique, No. 107, pp. 13-34.
- Thayer, G.D. (1974). "*An improved equation for the radio refractive index of air*", Radio Science, Vol. 9, No. 10, pp. 803-807.
- Yan H., Zhang G., Guo P. and Hong Zhengjie (2002).” *Discussion and Comparison of the mapping functions in radio frequencies*”, TAO, vol. 13, No. 4, pp. 563-575. Department of Mathematics, Wenzhou College, Zhejiang, China.
- Yan, H. and J. Ping (1995). "*The generator function method of the tropospheric refraction corrections*", The Astronomical Journal, Vol. 110, No.2, pp. 934-939.
- Yionoulis, S.M. (1970). "*Algorithm to compute tropospheric refraction effects on range measurements*", Journal of Geophysical Research, Vol. 75, No. 36, pp. 7636-7637.