

## **L'analisi tensoriale per il recupero di disegni e cartografie esistenti**

Caterina Balletti, Francesco Guerra

Università Iuav di Venezia, SdL Laboratorio di fotogrammetria, Italia

### **Riassunto**

Solitamente il collaudo avviene con lo scopo di controllare il contenuto metrico e semantico di disegni al termine di un rilievo appena eseguito, sia per quanto riguarda la scala cartografica che quella architettonica. Ma difficilmente viene adottato nel reperimento di rilievi esistenti, in considerazione di un loro re-utilizzo in un progetto di conservazione o restauro. Spesso, infatti, ci si trova di fronte a piante, sezioni e prospetti, realizzati in passato, con metodi e strumenti differenti, e ci si domanda quale sia la loro affidabilità e precisione.

Inoltre, nel tentativo di ridurre i costi necessari per un intervento di restauro e conservazione, si riduce al minimo la voce relativa al rilievo, con le conseguenti lacune nel processo conoscitivo dell'architettura in esame.

La qualità e la precisione di questi disegni può essere ri-valutata attraverso una fase di collaudo che impiega strumenti analitici già adottati nello studio del contenuto geometrico di cartografie storica: le trasformazioni piane e l'analisi tensoriale.

Nel caso delle trasformazioni piane, si tratta di adottare un modello analitico di trasformazione (affine o conforme) che consenta di valutare e confrontare un set di punti ricavati dal rilievo esistente e i loro omologhi rilevati direttamente sull'oggetto.

Nel secondo caso, la teoria elastica può fornire importanti informazioni riguardo le differenze geometriche tra due rappresentazioni dello stesso oggetto, ossia tra un disegno "storico" e una serie ridotta di punti rilevati ex novo. Si tratta dunque di ricercare dei parametri di deformazione locale, calcolati in specifiche aree del disegno. Introducendo delle grandezze invarianti e ulteriori trattamenti analitici, si può, in termini quantitativi, offrire una descrizione oggettiva delle alterazioni di un rilievo rispetto ad un altro.

Le procedure di verifica di seguito descritte si muovono in questa ottica: non sempre bisogna intervenire con una campagna approfondita di rilievo, ma si possono ridurre le operazioni di campagna a favore di un recupero della documentazione esistente. Tale approccio consente un notevole taglio nelle spese, ma senza dover rinunciare ad una necessaria conoscenza metrica della fabbrica, attraverso una valutazione in termini di precisione degli elaborati già a disposizione.

Gli autori, per approfondire lo studio sull'analisi tensoriale, hanno scritto un software che consente non solo il calcolo dei parametri della teoria elastica, ma anche di graficizzarne i contenuti, in considerazione della loro applicazione ai disegni di rilievo.

### **Abstract**

Usually testing operations are used with the aim to evaluate the metric and semantic content of drawings of a just realized survey, concerning both cartographic and architectural scale. But hardly testing operations are tackled when we have to consider some existing surveying drawings in terms of their re-use in a conservation project. We have often to work with graphic plans, sections and elevations, that were made in the past and the goal is to understand their accuracy, and if it's possible to use them again, thereby avoiding new surveys campaign.

The quality of existing surveys and their possible accuracy can be estimated by using analytical tools that the authors have already adopted for the geometric knowledge of the historical cartography: the use of plane transformations and strain analysis.

The first method is based on the analyses of conformal plane transformation results, the second one regards strain analysis application. This means to search for local deformation parameters, calculated in specific areas of the drawings. Introducing invariant quantities and more analytical treatments, they may, in quantitative terms, offer a more objective description of changes in the geometric content of a survey compared to another.

Le operazioni di collaudo di rilievi e cartografie esistenti hanno lo scopo di valutare il contenuto metrico e semantico di elaborati grafici di una documentazione facilmente reperibile in funzione del loro utilizzo in un progetto di conservazione.

Spesso, nel tentativo di ridurre i costi necessari per un intervento di restauro e conservazione, si riduce al minimo la voce relativa al rilievo, con le conseguenti lacune nel processo conoscitivo dell'architettura in esame.

Le procedure di verifica di seguito descritte si muovono in questa ottica: non sempre bisogna intervenire con una campagna approfondita di rilievo, ma si possono ridurre le operazioni di campagna a favore di un recupero della documentazione esistente. Tale approccio consente un notevole taglio nelle spese, ma senza dover rinunciare ad una necessaria conoscenza metrica della fabbrica, attraverso una valutazione in termini di precisione degli elaborati già a disposizione.

### **Trasformazioni piane e analisi dei residui**

La procedura di verifica si basa sul confronto tra due set di punti corrispondenti, il primo rilevato sull'architettura in questione, il secondo ricavato dal disegno esistente (pianta o prospetto).

I punti sull'edificio potranno essere rilevati topograficamente per irraggiamento dai vertici della rete principale al fine di ritenerli affidabili a meno degli errori strumentali. La distribuzione dei punti dovrà essere più possibile omogenea per evitare che una concentrazione in una zona influisca negativamente sulla valutazione complessiva della carta.

Le analisi proposte si basano sull'analisi dei risultati di una trasformazione piana conforme e sul confronto tra la distanza tra i punti dei due set il più delle volte tale analisi sono sufficienti per valutare la proprietà metrica dei rilievi esistenti numerizzati.

La prima procedura di collaudo è un confronto tra le coordinate carta e le coordinate terreno: le coordinate carta portate nel sistema di riferimento del rilievo con una trasformazione di similitudine (trasformazione a 4 parametri: rotazione, traslazione lungo gli assi X e Y, variazione di scala) e analizzate quindi sia le differenze di coordinate che il modulo del vettore differenza tra ogni punto sulla carta rototraslato e il corrispondente sul terreno. Tale procedura permette una valutazione generale della carta attraverso i parametri della trasformazione di similitudine nonché una localizzazione e quantificazione puntuale degli errori attraverso le differenze di coordinate.

Il secondo confronto si effettua sulle distanze: da ogni punto della carta e del rilievo vengono calcolate tutte le distanze con gli altri punti del proprio gruppo. Si ottengono così due set di distanze, l'uno sulla carta e l'altro sull'oggetto, che verranno confrontati valutando le differenze tra distanze corrispondenti.

Le due procedure sono complementari: la prima procedura permette di localizzare gli errori, di costituire le mappe di errore, di valutare la direzione degli errori, ma è influenzata dalla distribuzione dei punti sul monumento e può essere soggetta a fenomeni di mascheramento degli errori legato al calcolo ai minimi quadrati usato per la stima dei 4 parametri di trasformazione; la seconda procedura ha il vantaggio di non essere legata a un particolare sistema di riferimento e permette inoltre di valutare gli errori relativi tra zone differenti del monumento; per contro non permette una stima puntuale dell'errore ma ne segnala solo la presenza. L'utilizzo delle due procedure a cascata sugli stessi set di punti dà la possibilità di sfruttare le caratteristiche positive di

entrambe potendo superare le difficoltà: il fenomeno di redistribuzione e mascheramento degli errori è infatti facilmente individuabile con l'analisi delle distanze. Qualora le due procedure diano risultati analoghi si può ragionevolmente pensare che tali risultati siano veritieri.

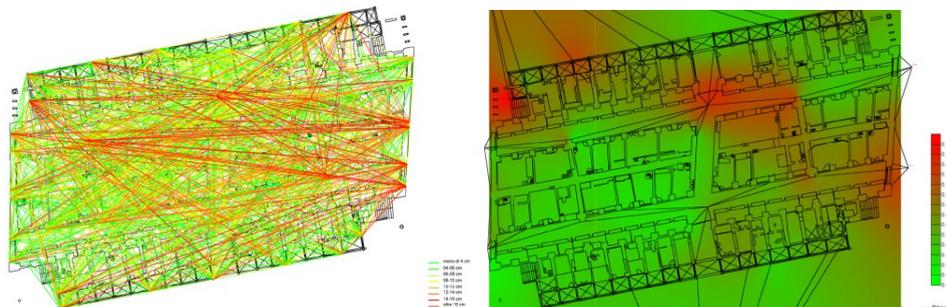


Figura 1 – Collaudo dei rilievi esistenti di Palazzo della ragione attraverso l'applicazione di trasformazioni piane.

Se si presentassero ancora incertezze sulla correttezza di tali rilievi e si volesse svolgere ulteriori accertamenti, si può ricorrere all'analisi tensoriale, nelle modalità di seguito descritte.

### L'analisi tensoriale per il confronto geometrico tra carte

Rispetto all'analisi dei residui ottenuti attraverso il best fitting tra cartografia attuale e carte storiche per determinare a quale sistema di riferimento meglio si approssima quello nascosto dalle carte antiche, la teoria dell'elasticità può fornire ulteriori informazioni riguardo le differenze geometriche tra due carte. Si tratta della ricerca di parametri di deformazione locali, calcolati in zone specifiche delle carte. Introducendo delle quantità invarianti e ulteriori trattamenti analitici, si può ottenere, in forma quantitativa, una descrizione più oggettiva delle alterazioni del contenuto geometrico di una carta rispetto all'altra.

Il metodo proposto utilizza come input le differenze di coordinate di elementi geometrici (features) comuni nelle carte dopo aver eliminato le differenze di traslazione, rotazione e scala tra i due set di punti che definiscono le feature, ovvero dopo aver effettuato il best fitting tra i due set utilizzando una rototraslazione con variazione di scala. Le differenze di coordinate sono considerate, in modo astratto, come se fossero le differenze di coordinate di punti di un "corpo" in due diversi stati: uno stato non sollecitato, nel nostro caso la carta di riferimento, e uno sottoposto a tensioni, che nel nostro caso è la carta storica di contenuto proiettivo ignoto.

L'analisi tensoriale, stabilita questa corrispondenza "meccanica", descrive il comportamento di una carta rispetto all'altra indicando così le differenze geometriche.

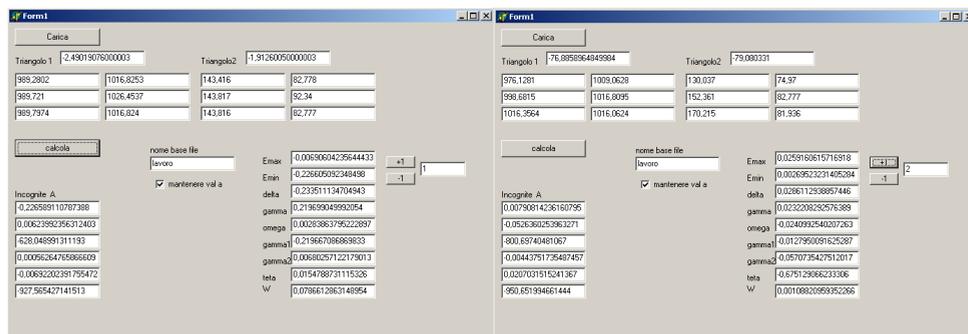


Figura 2 – Finestra del programma per il calcolo dei parametri elastici con Strain\_Map.

### Il software Strain\_Map

Per effettuare l'analisi tensoriale è stato implementato il software *Strain\_Map* che consente il calcolo dei parametri elastici a partire da due triangolazioni su due set di punti omologhi appartenenti a due diverse carte.

Interpolando e mappando i corrispondenti valori è quindi possibile valutare le differenze tra le diverse cartografie. I valori dei parametri ottenuti sono infatti assegnati al baricentro di ogni triangolo; per tutti gli altri punti i valori sono ottenuti mediante interpolazione utilizzando l'algoritmo di Kriging.

Il programma, caricando il file contenente i dati della triangolazione sulle due carte, calcola le incognite del sistema:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & y_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{12} & y_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{13} & y_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & y_{11} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_{12} & y_{12} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_{13} & y_{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \alpha \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \beta \end{bmatrix}$$

ossia le derivate parziali  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  e i valori di  $\alpha$  e  $\beta$ . Avendo i valori delle incognite vengono quindi determinati i seguenti parametri tensoriali:

- 1)  $E_{\max}$
- 2)  $E_{\min}$
- 3) dilatazione  $\Delta = E_{\max} + E_{\min}$
- 4) massimo sforzo  $\gamma = E_{\max} - E_{\min}$
- 5) deformazione di rotazione  $\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
- 6) sforzi di taglio  $\gamma_1 = e_{xx} - e_{yy}$  e  $\gamma_2 = e_{xy} - e_{yx}$
- 7) azimuth dell'asse di massima tensione  $\vartheta = \arctan(\gamma_2/\gamma_1)/2$
- 8) energia di sforzo  $W = \Delta^2 + 1/2\gamma^2$ .

I file di output di *Strain\_Map* sono:

- una tabella contenente per ogni triangolo le coordinate del baricentro e i valori delle incognite e dei parametri;
- un file .dxf delle triangolazioni effettuate sulle due carte.

### Triangolazione di Delaunay

A partire dai punti di controllo l'area della carta viene suddivisa in patch triangolari in modo automatico con opportuni algoritmi di triangolazione; tra questi quello utilizzato in *Strain\_Map* è la triangolazione di Delaunay. La triangolazione individuata sui punti della carta storica viene riportata anche sulla carta attuale utilizzando i punti omologhi.

Si tratta di congiungere opportunamente tutti i punti dell'insieme in modo da formare un insieme di triangoli minimizzando le lunghezze dei lati.

Dato un insieme di punti bidimensionali  $\{P\}$ , una triangolazione di Delaunay consiste in un insieme di triangoli aventi come vertici i punti di  $\{P\}$ , tali che per ognuno di essi, nessun punto di  $\{P\}$ , esclusi i vertici, è interno al cerchio circoscritto al triangolo stesso.

Se ci sono solo tre punti in ogni cerchio (i vertici di ogni singolo triangolo), la triangolazione di Delaunay è unica. Se invece si presenta il caso in cui ci sono più di tre punti sul cerchio si può sempre ottenere una triangolazione ma in modo univoco.

L' algoritmo costruisce la triangolazione a partire da un arbitrario triangolo iniziale che include tutti i punti.

Ciascun punto viene introdotto osservando quale triangolo tra quelli presenti ha un cerchio circoscritto che contiene il nuovo punto. Ciò viene determinato dal confronto tra raggio del cerchio circoscritto e distanza tra nuovo punto e il centro del cerchio.

Quei triangoli i cui cerchi circoscritti si intersecano sono cancellati e rimpiazzati da altri nuovi che includono il nuovo punto. Si formano quindi nuovi triangoli a partire dal nuovo punto e da ciascun lato rimanente.

Operando in questo modo per ogni punto introdotto il numero di triangoli aumenta di due. Quando tutti i punti sono stati inseriti, si ottiene la configurazione finale della triangolazione. Tutti i triangoli sono *triangoli di Delaunay*: hanno cioè il cerchio circoscritto che non contiene punti.

Per verificare la bontà del software, prima di applicare tutte le operazioni alle carte è stato effettuato un test. E' stata generata un'immagine di partenza con 28 punti segnalizzati distribuiti omogeneamente. E' stata generata poi una seconda immagine simile alla prima, ma con 3 dei 28 punti ruotati in senso antiorario di  $p/6$  ovvero di 0,523

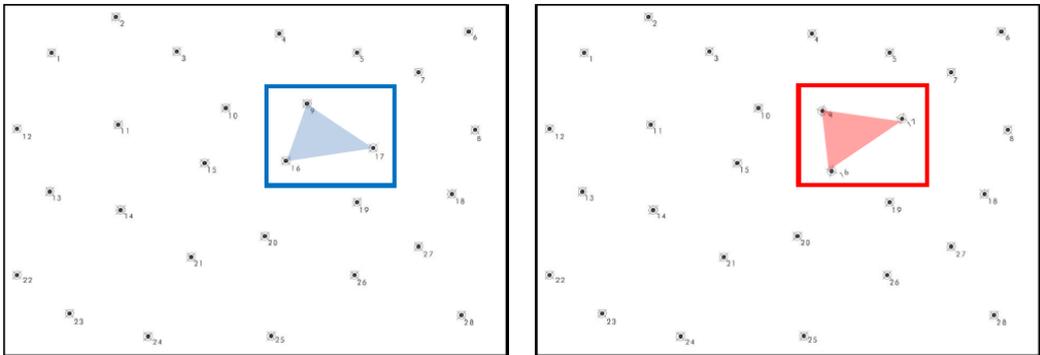


Figura 3 – Immagini usate per verificare il software.

I 2 set di coordinate dei punti delle immagini ottenute sono stati utilizzati come input per il software che ha calcolato i parametri dell'analisi tensoriale ed ha generato un file con le triangolazioni sui set di punti. Dalla sovrapposizione delle 2 triangolazioni si nota con evidenza la rotazione del triangolo indicato in Figura 3.

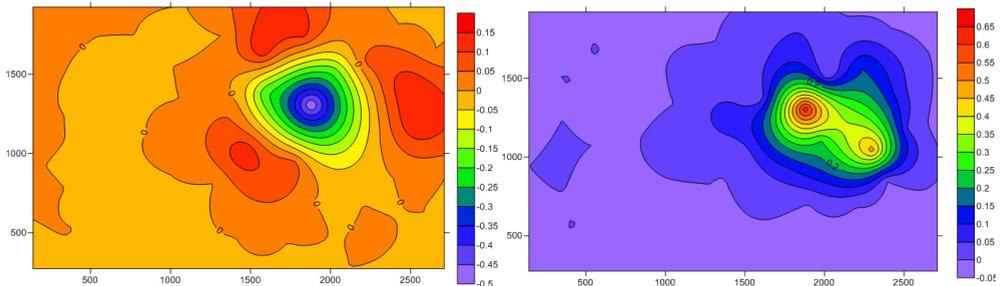
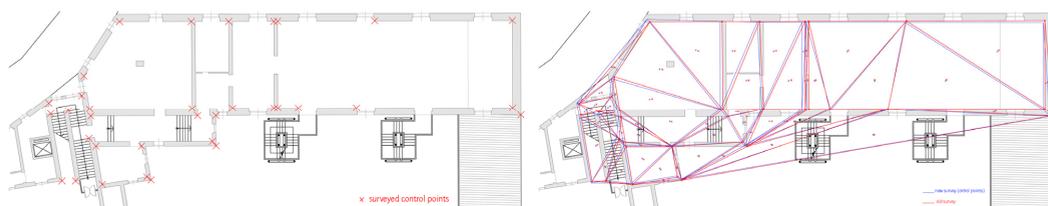
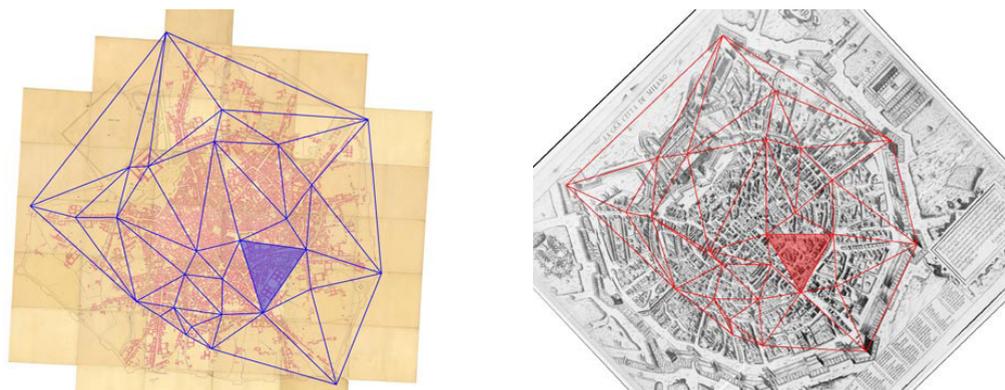


Figura 4 – Sx: la mappatura del parametro  $w$  rotazione. Il punto di rotazione massima corrisponde al baricentro del triangolo ruotato. Il parametro calcolato in quel punto è  $-0,5$  che corrisponde a  $p/6$  ovvero la rotazione applicata all'inizio.

Dx: mappatura del parametro  $W$  energia di sforzo massimo.

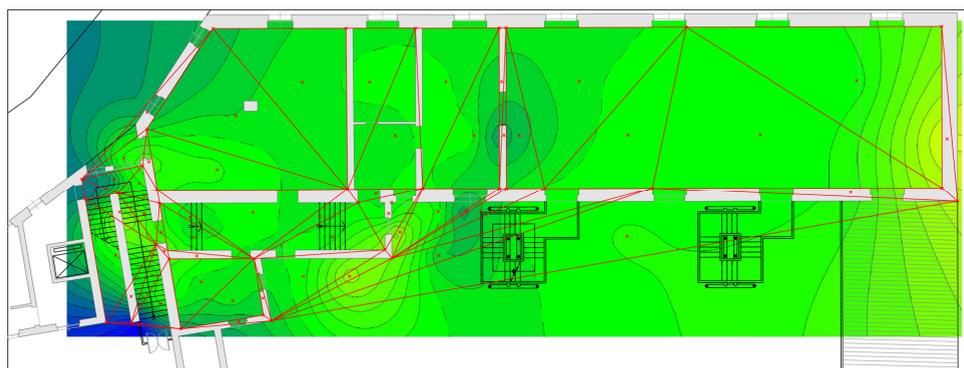


*Figura 5 – La triangolazione di Delaunay sui due rilievi confrontati.*



*Figura 6 – Le triangolazioni di Delaunay sovrapposte alle due carte oggetto dello studio. A sinistra la Carta degli Astronomi di Brera dopo la georeferenziazione, a destra la Carta di Lafrèry dopo la trasformazione affine.*

L'applicazione è stata effettuata tra un rilievo attuale, assunto come carta di riferimento, e un rilievo esistente del complesso dei Tolentini, sede storica della nostra Università, e ad alcune carte storiche, come la veduta prospettica di Milano di Antonio Lafrery (1573), usando come riferimento la Carta degli Astronomi di Brera. Tale applicazione offre delle informazioni ulteriori rispetto all'interpretazione dell'analisi della deformazione basata sulla distribuzione dei residui, in quanto mette ulteriormente in luce le anomalie geometriche puntuali rapportandole inoltre rispetto a tutta la rappresentazione geografica.



*Figura 7 – Rappresentazione a isolinee della parte isotropa della deformazione data dai valori di dilatazione.*

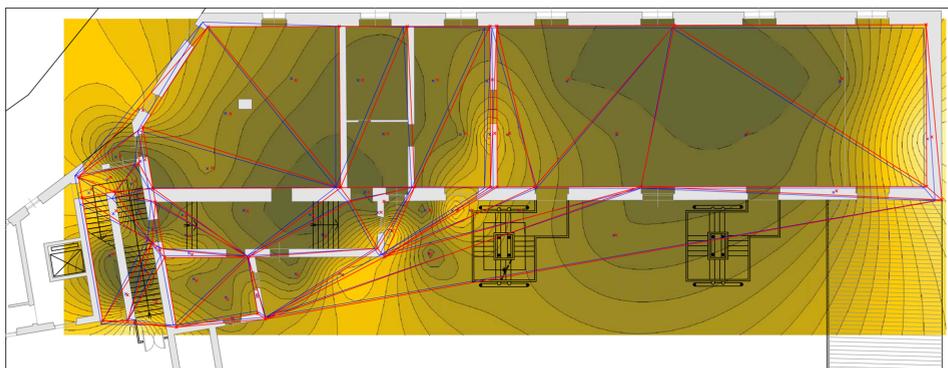


Figura 8 – Rappresentazione a isolinee della parte anisotropa della deformazione data dai valori di massimo taglio  $\gamma$ .

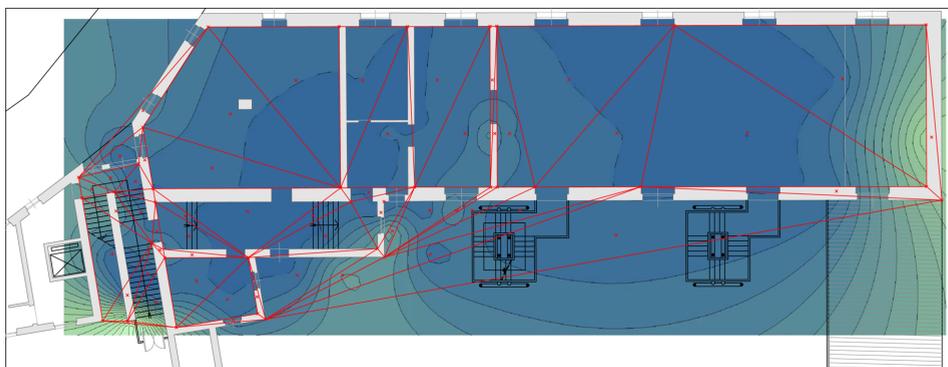


Figura 9 – Rappresentazione dell'energia  $W$  che sintetizza le componenti anisotrope e isotrope della sforzo.

Nel caso del rilievo dei Tolentini, vengono così evidenziati le eventuali rotazioni di alcune parti della rilievo esistente (errore tipico di un rilievo eseguito mediante il metodo diretto) rispetto al rilievo attuale.

Eseguita la triangolazione a partire dai punti di controllo e assegnando al baricentro di ciascun triangolo i relativi parametri tensoriali calcolati, si possono disegnare delle isolinee di uguale valore tensoriale (linee iso- $\Delta$  per la dilatazione, iso- $\gamma$  per lo sforzo massimo di taglio, iso- $\omega$  per la rotazione e linee iso- $W$  per l'energia dissipata), che indicano, in un certo modo, la variazione dovuta alla diversa geometria delle carte.



Figura 10 – Mappatura del parametro di dilatazione  $D$  relativo alla Carta di Lafrery.



Figura 11 – Mappatura del parametro di rotazione  $w$  relativo alla Carta di Lafrery.



Figura 12 – Attraverso il parametro di dilatazione  $D$  è possibile dimostrare analiticamente che il castello sforzesco è stato disegnato da Lafrèry diminuendo la scala di rappresentazione, presumibilmente per motivi di celebrazione del potere politico.

## Conclusioni

Attraverso questa esperienza, si vuole dimostrare che attraverso la valutazione dei risultati delle analisi applicate è possibile non solo verificare l'affidabilità di cartografie storiche e di rilievi esistenti, ma anche impostare una procedura per il loro recupero/restauro geometrico.

Tale sperimentazione è stata svolta dagli autori in maniera approfondita in cartografia, e quindi può essere applicata anche agli elaborati di rilievi, storici o svolti secondo metodologie non rigorose, come descritto in questo articolo.

La "correzione" dei disegni, una volta individuati eventuali localismi nella distribuzione preferenziale dell'errore, può avvenire attraverso una procedura di deformazione locale che si basa sull'uso di algoritmi di warping, ben noti in computer graphic, ma già applicati nel recupero delle carte antiche.

## Bibliografia

- Boutoura, C., E. Livieratos (1986): Strain analysis for geometric comparisons of maps. *The Cartographic Journal*, Vol. 23, No. 1, 27-34.
- Dermanis, A., and E. Livieratos (1983), Applications of deformation analysis in geodesy and geodynamics, *Rev. Geophys.*, 21(1), 41-50, 1983.
- Balletti C., Monti C., Guerra F., Galeazzo G. (2000): *Capitolato speciale d'appalto per l'esecuzione del rilievo in forma numerica alla scala 1:50*, CIRCE, QuadernIUAV, Venezia, ISBN 88-87697-10-8.