Calcolo delle coordinate in una poligonale tridimensionale in metrologia meccanica

Battista Benciolini, Alfonso Vitti

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università degli studi di Trento, Via Mesiano 77, 38123 Trento
Tel. 0461.282632-08, Fax 0461 282672, E-mail: battista.benciolini@unitn.it, alfonso.vitti@unitn.it

Riassunto
Si descrive l'algoritmo che è stato codificato per eseguire il calcolo delle coordinate di una sonda meccanica. Il sistema di misura è costituito da una serie di aste collegate tra loro da cerniere cilindriche con la prima asta incernierata a un supporto e l'ultima che termina con la sonda.
Gli impieghi di un sistema di questo tipo includono il rilievo di piccole strutture o oggetti come telai, apparati sperimentali e meccanici, la verifica di conformità al progetto o la determinazione di deformazioni.
I dati del problema sono le dimensioni e l'orientamento delle aste e l'orientamento degli assi delle cerniere in una posizione base e le letture dei goniometri inseriti nelle cerniere che danno gli angoli tra la posizione base e la posizione attuale di misura.
Nell'articolo si mostra come la scelta di una opportuna rappresentazione delle rotazioni, cioè mediante quaternioni, renda sostanzialmente semplici tutte le fasi del calcolo incluso il concatenamento delle rotazioni e l'orientamento assoluto. L'orientamento assoluto è necessario per fornire il risultato in un sistema di riferimento definito sull'oggetto da rilevare.
Il programma realizzato costituisce ovviamente il nucleo di calcolo di un sistema più complesso.
Il problema affrontato è un problema di metrologia meccanica ma è stato risolto con la applicazione di conoscenze tipiche delle discipline geodetiche.

Introduzione
In questo lavoro si descrive una soluzione per il calcolo di coordinate in un sistema di misura elettro-meccanico per il rilievo di oggetti di piccole e medie dimensioni in ambito industriale.
Il sistema di misura consiste in una sonda meccanica composta da un insieme di aste collegate tra loro da cerniere cilindriche. La prima asta è collegata con una cerniere a un supporto mentre l'ultima asta termina con una marca di riferimento che viene portata sui punti dei quali si vogliono conoscere le coordinate. Sistemi di questo tipo si possono impiegare per il rilievo ex-novo o l'ispezione di piccole strutture o oggetti come telai, stampi, componentistica e pezzi meccanici, ma anche per la verifica di conformità al progetto o la determinazione di deformazioni.
Ciascuna cerniera è dotata di un elemento di misura delle rotazioni (goniometro) e sono note le dimensioni delle aste. Il sistema acquisisce le rotazioni che si applicano alle cerniere nel muovere la sonda e restituisce le coordinate della estremità libera dell'asta terminale. Le coordinate vengono determinate con un opportuno calcolo una volta noti i parametri geometri dello strumento in una qualche posizione che chiamiamo posizione base. Nella posizione base di devono conoscere:
- le dimensioni delle aste e il loro orientamento nello spazio;
- l'orientamento nello spazio degli assi delle cerniere;
- la lettura dei goniometri.

Dimensioni e orientamenti vengono espressi in un sistema di riferimento legato allo strumento.
Da un punto di vista geometrico, si deve considerare il sistema articolato di aste come una spezzata nello spazio tridimensionale. A ogni lato della spezzata, e quindi a ogni asta, si associa un vettore

che rappresenta la differenza di posizione tra un punto iniziale e un punto finale. Per calcolare le coordinate della marca di riferimento (ultimo punto della spezzata) si parte da un punto origine convenzionale e si sommano tutti gli incrementi dati dai vari lati della spezzata. Prima di fare questo i vettori devono essere opportunamente orientati nello spazio. L'orientamento effettivo deve essere calcolato tenendo conto dell'orientamento delle aste e delle letture dei goniometri nella posizione base. Le coordinate che si ottengono nel modo descritto sono date ovviamente nel sistema di riferimento legato allo strumento.
Qualora si vogliano esprimere le coordinate in un sistema diverso da quello strumentale, per esempio un sistema legato all'oggetto, si devono stimare i parametri della trasformazione tra i due sistemi. Per questo lo strumento può essere impiegato per rilevare una serie di punti dei quali siano note le coordinate nel sistema legato all'oggetto così da produrre un catalogo di punti doppi. Si può quindi procedere alla stima dei parametri della trasformazione. Una volta noti questi parametri, la trasformazione tra sistemi di riferimento può essere incorporata direttamente nella catena di calcolo delle coordinate per avere subito il risultato nel sistema legato all'oggetto.
Il problema è stato risolto applicando conoscenze consolidate e tutte reperibili in letteratura ma presenta alcuni aspetti di un certo interesse generale:

- il carattere interdisciplinare, perché si sono applicate nell'ambito della metrologia meccanica conoscenze acquisite in ambito geodetico;
- la applicazione di strumenti matematici che pur essendo ben noti e consolidati non sembrano impiegati di frequente;
- la realizzazione di una soluzione che deve essere implementata all'interno di un programma che presiede in tempo reale al funzionamento dello strumento di misura.

Problemi da affrontare
All'interno delle procedure di calcolo appena descritte si individuano due problemi significativi:

- il concatenamento delle rotazioni applicate alle cerniere, per calcolare l'orientamento nello spazio di ogni asta;
- la stima dei parametri della trasformazione tra sistemi di riferimento.

Rispetto a molti problemi tipici in topografia e fotogrammetria, in questo caso non esiste alcun legame a priori tra i due sistemi di riferimento, quindi non si può fare alcuna ipotesi sui valori dei parametri da stimare. Per questo, il problema dell'orientamento assoluto si deve risolvere utilizzando un algoritmo che possa funzionare con configurazione qualsiasi e senza informazioni a priori sulla soluzione.
Per risolvere questi problemi si fa uso dell'algebra dei quaternioni, un formalismo matematico forse poco noto e apparentemente legato a settori formali e astratti della matematica, ma capace in realtà di fornire una soluzione computazionalmente molto semplice. L'uso dei quaternioni per rappresentare le rotazioni è ormai diffuso in molti settori della tecnica e in particolare in geodesia, fotogrammetria, cinematica dei sistemi articolati (con applicazioni per esempio nella robotica), dinamica del corpo rigido (con applicazioni per esempio al controllo d'assetto dei satelliti artificiali).
Nel seguito si introducono brevemente gli strumenti matematici scelti per risolvere i problemi elencati poco sopra. In una sezione successiva si presenta in modo schematico la procedura di calcolo implementata.

Strumenti matematici

L'algebra dei quaternioni
Nell'algebra elementare si lavora con i numeri reali che possono essere combinati tra loro con le quattro operazioni: somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Una prima generalizzazione è la costruzione dei numeri complessi. Ogni numero complesso ha due componenti che sono la parte reale e la parte immaginaria, quindi un numero complesso può essere considerato come una coppia

di numeri reali. Tra i numeri complessi si eseguono le quattro operazioni. Le operazioni tra numeri complessi sono una generalizzazione delle operazioni tra numeri reali.
Una ulteriore generalizzazione è costituita dai quaternioni che sono degli oggetti a quattro componenti: una reale e tre immaginarie. L'idea dei quaternioni si deve a Hamilton il quale cercava una generalizzazione nello spazio tridimensionale dei numeri complessi e del loro significato di operatori di rotazione nel piano.
Per indicare i quaternioni si usa la notazione: **a**, **b**, cioè lettere minuscole in grassetto. Un quaternione **q** si descrive semplicemente con l'elenco delle sue componenti, secondo la notazione: q_0, q_1, q_2, q_3. La prima componente è la parte reale, le altre tre componenti formano un vettore che è la parte immaginaria. Gli ordinari numeri complessi si possono considerare come l'insieme di una parte reale e una parte immaginaria, che sono entrambe scalari. I quaternioni si possono considerare come l'insieme di una parte reale scalare e una parte immaginaria vettoriale. Si usa quindi la notazione: $\mathbf{q} = q_0 + i\underline{q}$ dove le componenti di $\underline{q}$ sono q_1, q_2 e q_3 (si usa la sottolineatura per denotare i vettori).
Tra i quaternioni si definiscono quattro operazioni, che chiamiamo ancora somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione, che sono una generalizzazione delle solite quattro operazioni tra numeri reali. La uguaglianza, la somma e la sottrazione tra quaternioni si definiscono sulla base dell'uguaglianza, della somma e della sottrazione delle singole componenti. Il prodotto di un quaternione per un numero reale si definisce con il prodotto delle singole componenti con il numero reale. Il prodotto di due quaternioni **q** e **p** è definito come:

$$\mathbf{qp} = (q_0 p_0 - \underline{q} \cdot \underline{p}) + i\,(q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + \underline{q} \wedge \underline{p}) .$$

La scrittura $\underline{q} \cdot \underline{p}$ indica il prodotto scalare tra vettori e la scrittura $\underline{q} \wedge \underline{p}$ indica il prodotto vettore. Il coniugato di un quaternione si indica con **q'** e ha la parte reale uguale a quella di **q** e la parte complessa opposta. Il modulo di un quaternione vale $|\mathbf{q}| = (\mathbf{qq'})^{1/2} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}$. Infine il reciproco di un quaternione è definito come: $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q'}/|\mathbf{q}|^2$. Attraverso il reciproco si definisce coerentemente la divisione tra quaternioni. Le quattro operazioni così definite godono delle stesse proprietà delle quattro operazioni tra numeri reali o complessi con una unica eccezione: la moltiplicazione tra quaternioni, coinvolgendo un prodotto vettore, non è commutativa. Per i nostri scopi è importante che il prodotto sia associativo.

La rappresentazione delle rotazioni con i quaternioni
Mediante i quaternioni è possibile esprimere una rotazione nello spazio partendo dalla seguente corrispondenza:

$$\underline{x} \leftrightarrow \mathbf{x} = 0 + i\,\underline{x}$$

che associa un quaternione immaginario **x** al generico vettore $\underline{x}$ nello spazio tridimensionale.
L'espressione:

$$\mathbf{u\,x\,u'}$$

con $|\mathbf{u}|=1$ e con $\mathbf{x} = 0 + i\,\underline{x}$ è lineare in **x** e ha come risultato un quaternione, pure immaginario, con la stessa norma di **x**, perciò rappresenta una rotazione nello spazio tridimensionale. La corrispondenza e la espressione appena scritte dicono che si usano quaternioni immaginari per rappresentare i punti nello spazio e quaternioni con modulo unitario per rappresentare le rotazioni. In entrambi i casi si usano quattro parametri e un vincolo per descrivere gli elementi di una varietà a tre dimensioni.
In analogia con gli ordinari numeri complessi, un quaternione di modulo unitario si può anche esprimere come: $\mathbf{u} = \cos(\alpha / 2) + i \sin(\alpha / 2)\, \underline{u}$ dove $\underline{u}$ è un vettore ancora di modulo unitario e α un angolo generico. Il quaternione **u** rappresenta una rotazione nello spazio tridimensionale di un angolo pari a α attorno all'asse individuato dal versore $\underline{u}$, così come ogni numero complesso di

modulo unitario rappresenta una rotazione nel piano. Per quanto ci interessa, l'asse di rotazione è realizzato da una cerniera cilindrica e l'angolo è una variabile che viene misurata. La rotazione di un certo angolo α attorno a un dato asse $\underline{u}$ è allora rappresentata da un quaternione **u** di modulo unitario che ha:

- la parte reale $u_0 = cos(\alpha/2)$;
- la parte immaginaria che è un vettore orientato come l'asse di rotazione e di modulo pari a $sin(\alpha/2)$.

In molti ambiti una rotazione nello spazio tridimensionale viene rappresentata da una matrice **R**, ortonormale e con $det(\mathbf{R}) = 1$, detta matrice di rotazione. A ogni matrice di rotazione si può allora associare un quaternione di modulo unitario e viceversa. Il quaternione che rappresenta una rotazione, e che quindi è associato a **R**, è definito a meno del segno. La rappresentazione delle rotazioni mediante quaternioni ha un pregio molto significativo che è la facilità con cui si calcolano i parametri di una rotazione che sia la composizione di due rotazioni date. E' evidente che se consideriamo due rotazioni associate ai quaternioni di modulo unitario **a** e **b** la rotazione risultante dalla loro composizione è semplicemente associata al loro prodotto **ab**.

La soluzione del problema di Helmert con l'uso dei quaternioni

Sfruttando ancora la corrispondenza $\underline{x} \leftrightarrow \mathbf{x} = 0 + i\,\underline{x}$, la nota trasformazione di Helmert si scrive:

$$\mathbf{y} = \rho\, \mathbf{q}\, \mathbf{x}\, \mathbf{q}' + \mathbf{b}$$

dove:

- **x** e **y** sono i quaternioni immaginari che rappresentano uno stesso punto in due diversi sistemi di riferimento;
- ρ è lo scalare che rappresenta il fattore di scala;
- **q** è il quaternione di modulo unitario che rappresenta la rotazione;
- **b** è il quaternione immaginario che rappresenta la traslazione.

In generale si stimano i parametri della trasformazione di Helmert a partire da un insieme di punti più numeroso di quello strettamente indispensabile applicando il criterio dei minimi quadrati. Sia m il numero dei punti noti in entrambe i sistemi di riferimento. Si usa $j = 1..m$ come indice che corre sull'insieme dei punti. Il problema da risolvere è dunque un problema di minimo che si scrive come:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{y}_j - (\rho\, \mathbf{q}\, \mathbf{x}_j\, \mathbf{q}' + \mathbf{b})$$

$$\sum_{j=1}^{m} |\, \mathbf{v}_j \,|^2 = \text{minimo.}$$

Si devono cercare i valori delle incognite ρ, **q** e **b** che rendono minimo il valore della sommatoria indicata. La soluzione deve rispettare il vincolo sulla norma di **q**. Il problema di Helmert è un problema non lineare. Ciò non ostante sono state trovare varie soluzioni che permettono un calcolo diretto senza dover linearizzare le equazioni. Questo fatto è importante quando non si dispone di una soluzione approssimata nota a priori. In questo lavoro si usa la soluzione basata sui quaternioni data da Sansò (1973) e se ne riportano solo le parti essenziali per descrivere la procedura di calcolo.
La stima del termine di traslazione è semplice, e viene ottenuta in modo indiretto riducendo a baricentriche entrambi i pacchetti di coordinate. Nel seguito si suppone che le coordinate siano ridotte a baricentriche, ma si continuano a usare i simboli **x** e **y** e le notazioni già definite. Per indicare una particolare componente del vettore delle coordinate di un singolo punto si usano due indici come nell'esempio seguente: x_{kj}, dove si usa $k = 1..3$ per indicare la componente del vettore e $j = 1..m$ per indicare il particolare punto a cui appartiene la coordinata. Si costruisce la matrice **A** quadrata simmetrica di ordine 4:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{m} \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^{3} x_{kj} y_{kj} & -(x_{2j}y_{3j} - y_{2j}x_{3j}) & -(x_{3j}y_{1j} - y_{3j}x_{1j}) & -(x_{1j}y_{2j} - y_{1j}x_{2j}) \\ & \sum_{k=1}^{3} x_{kj} y_{kj} - 2x_{1j}y_{1j} & -(x_{2j}y_{1j} + y_{2j}x_{1j}) & -(x_{3j}y_{1j} + y_{3j}x_{1j}) \\ & & \sum_{k=1}^{3} x_{kj} y_{kj} - 2x_{2j}y_{2j} & -(x_{3j}y_{2j} + y_{3j}x_{2j}) \\ & & & \sum_{k=1}^{3} x_{kj} y_{kj} - 2x_{3j}y_{3j} \end{bmatrix}.$$

La soluzione al problema di Helmert si ricava dalla coppia autovettore-autovalore con il valore minimo dell'autovalore, che sarà a sua volta un numero negativo. Le componenti dell'autovettore, eventualmente normalizzate, forniscono le componenti del quaternione di modulo unitario cercato, cioè il quaternione che risolve il problema. Il fattore di scala infine vale:

$$\rho = -\lambda / \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{3} x_{kj}^2$$

dove λ è l'autovalore minimo appena calcolato.

Procedure di calcolo

Nel seguito indichiamo con $\underline{r}_l$ i vettori che descrivono i lati della spezzata e con $\underline{t}_l$ i versori che descrivono gli assi delle cerniere nella posizione base e nel sistema di riferimento strumentale. L'indice *(l)* corre su tutte le aste e su tutte le cerniere. L'asta *l* parte dal punto *l* e va fino al punto *l*+1. Se vi sono in tutto *n* aste il punto *n*+1 è la marca di misura di cui si devono determinare le coordinare. Si indica con α_l l'angolo che viene letto nella cerniera nel punto *l* al momento della misura. Sia: $\mathbf{q}_l = \cos(\alpha/2) + i \sin(\alpha/2)\, \underline{t}_l$ il quaternione che rappresenta la rotazione della cerniera *l*. Questa espressione rappresenta la rotazione imposta dalla cerniera *l* all'asta *l* e alle aste successive. In pratica l'asta *l* subisce una rotazione nello spazio che è l'effetto combinato delle prime *l* cerniere. Questo effetto combinato si ottiene semplicemente moltiplicando tra di lori i corrispondenti quaternioni. Conviene dunque definire un nuovo quaternione $\mathbf{p}_l$ che sia la produttoria parziale dei quaternioni da $\mathbf{q}_1$ a $\mathbf{q}_l$:

$$\mathbf{p}_l = \prod_{s=1}^{l} \mathbf{q}_s \, .$$

Attraverso i quaternioni $\mathbf{p}_l$ è possibile operare la rotazione che dà a ogni lato della spezzata il suo corretto orientamento. Per fare questo si associa a ogni vettore $\underline{r}_l$ un quaternione puramente immaginario $\mathbf{r}_l = 0 + i\, \underline{r}_l$ e poi si applica la rotazione con la espressione:

$$\mathbf{s}_l = \mathbf{p}_l \, \mathbf{r}_l \, \mathbf{p}'_l$$

che produce il quaternione immaginario $\mathbf{s}_l$ la cui parte vettoriale è proprio il lato *l* della spezzata con il nuovo orientamento nello spazio. A questo punto, per ottenere il quaternione $\mathbf{x}$ la cui parte vettoriale contiene le coordinate del punto *n*+1 è sufficiente sommare tutti i lati della spezzata:

$$\mathbf{x} = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{s}_l \, .$$

Le coordinate della marca di riferimento così ottenute sono date ancora nel sistema di riferimento strumentale.

A valle del rilievo di un adeguato numero di punti per i quali siano note le coordinate in un sistema di riferimento legato all'oggetto è possibile stimare i parametri della trasformazione di Helmert tra questo sistema e quello strumentale seguendo il procedimento descritto poco sopra. Successivamente sarà possibile produrre coordinate direttamente nel sistema di riferimento legato all'oggetto utilizzando i parametri appena stimati per applicare la trasformazione a tutti i nuovi punti rilevati.

Osservazioni conclusive

La procedura descritta fornisce risultati pienamente soddisfacenti. Il programma di calcolo realizzato è stato incorporato in un prodotto funzionante.

Sullo svolgimento del lavoro e sulle scelte operate si possono fare alcune osservazioni. Gli algoritmi che sono stati progettati e programmati sono piuttosto semplici e si sono dimostrati efficienti ed efficaci. Questo si deve soprattutto alla scelta dello strumento matematico più adatto per la rappresentazione delle rotazioni, cioè l'algebra dei quaternioni. Crediamo che i pregi di questa rappresentazione, già presentati nel testo, possano essere ribaditi:

- si utilizzano parametri di preciso significato geometrico intrinseco;
- non si hanno singolarità;
- è facile eseguire il concatenamento delle rotazioni;
- esiste una soluzione diretta al problema dell'orientamento assoluto.

E' importante notare che le prime tre caratteristiche del metodo sono strettamente legate tra di loro.

A noi risulta evidente il legame tra la semplicità degli algoritmi e le proprietà della rappresentazione utilizzata. Questo dovrebbe fare riflettere sulla convenienza e la utilità di affrontare i problemi, anche semplici, con un appropriato inquadramento teorico e di utilizzare anche, dove serve, strumenti matematici non abituali.

Una ulteriore e ultima osservazione riguarda l'ambito disciplinare del lavoro svolto. Il problema presentato ricade nell'ambito della metrologia meccanica per applicazioni in campo industriale ma è stato risolto utilizzando conoscenze tipiche delle discipline geodetiche.

Indicazioni bibliografiche

Una trattazione delle diverse rappresentazioni delle rotazioni si può trovare negli articoli di Nitschke e Knickmeyer (2000) e di Stuelpnagel (1964). Il libro di Altmann (2002) tratta le rappresentazioni intrinseche delle rotazioni e l'algebra dei quaternioni. Il libro di Kuipers (2002) ha un carattere molto pratico e didattico ed è dedicato alle applicazioni dei quaternioni in vari settori della meccanica. Nell'articolo di Sansò (1973) si trovano una essenziale introduzione all'algebra dei quaternioni, una trattazione della rappresentazione delle rotazioni mediante i quaternioni e la soluzione del problema della stima dei parametri della trasformazione di Helmert basata su tale rappresentazione.

Bibliografia essenziale

Altmann S.L. (2002), *Rotations, Quaternions, and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford

Kuipers J.B. (2002), *Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*, Princeton university press, Oxford

Nitschke M. and Knickmeyer E.E. (2000), "Rotation parameters, a survey of techniques", *Journal of Surveying Engineering* 126 (3), 69-105

Sansò F. (1973), "An exact solution of the roto-translation problem", *Photogrammetria* 29, 203-216

Stuelpnagel J. (1964), "On the parametrization of the three-dimensional rotation group", *SIAM Review* 6 (4), 422-430