

Applicazioni geomatiche nell'ingegneria delle infrastrutture

Federico Fiori (*), Luigi Mussio (**), Valentina Slavazzi (***),
Claudia Vanetti (****), Stefania Vismara (*****)

(*) Politecnico di Milano, D.I.I.A.R., e-mail: federico.fiori@polimi.it

(**) Politecnico di Milano, D.I.I.A.R., e-mail: luigi.mussio@polimi.it

(***) Politecnico di Milano, D.I.I.A.R., e-mail: valentinaslv@alice.it

(****) Politecnico di Milano, D.I.I.A.R., e-mail: vanets@libero.it

(*****) Politecnico di Milano, D.I.I.A.R., e-mail: stefania.vismara@hotmail.it

Riassunto

Un campo prove materiali allestito è stato studiato, mediante misure in sito, indagini di laboratorio e simulazioni analitiche, desumendo grandezze meccaniche di interesse e raggiungendo risultati statisticamente significativi. Allora avendo programmato un piano mirato di esperimenti simulati, lo studio è proseguito così da stabilire numeri minimi di parametri, capaci di spiegare il fenomeno con una certa precisione. Una seconda parte tratta della ricostruzione di superficie, interessata da una linea di rottura. Infatti l'approccio statistico, in sostituzione ai normali rilievi profilo-metrici e sulla base di semplici rilievi topografici, fa ricorso a tecniche di matematica applicata ed informatica grafica. Nel caso specifico, una lastra di calcestruzzo fessurata è stata ricostruita nelle sue variazioni nello spazio, a seguito di variazioni di temperatura giornaliera. A riguardo, si noti il carattere interdisciplinare del lavoro che collega insieme matematica applicata, trattamento delle osservazioni (proprio della topografia e della geomatica) e progettazione civile di infrastrutture.

Abstract

A well designed plan of simulated experiments has been programmed. After that the study is continued in order to establish the smallest number of parameters able to explain the test field with a given precision. A second part deals with the study of a typical rigid pavement surface interested by a break-line. The aim is monitoring of a surface deformation reconstruction, due to daily temperature variations, in order to set up innovative solutions.

PARTE I – ANALISI DELLA CONNESSIONE, DI VARIANZA E FATTORIALE DELLE PRESTAZIONI DI PAVIMENTAZIONI AEROPORTUALI

Connessione multipla

Lo studio in fase progettuale delle prestazioni in esercizio, di pavimentazioni per infrastrutture di trasporto e, in particolare, aeroportuali è necessario al fine di realizzare pavimentazioni con elevati standard di sicurezza e durabilità, anche in ragione del valore economico del bene. Il ricorso a sistemi innovativi di pavimentazione che associno, alle necessarie prestazioni nel tempo, anche il ricorso a materiali di riciclo o di recupero risulta un tema di grande interesse per le implicazioni economiche ed ambientali che tali materiali presentano. Per tali ragioni, è stato affrontato lo studio di due diversi sistemi: una pavimentazione flessibile, di tipo tradizionale, ed una di tipo innovativo, realizzata con materiali riciclati dalla demolizione di opere civili, per gli strati portanti, e da uno strato superficiale posato con la tecnologia bitume – cemento. Per entrambe le pavimentazioni, costituita ognuna da quattro strati, lo studio è stato effettuato mediante l'ausilio di un campo prove, per mezzo del quale è stato possibile misurare con prove di laboratorio e di campo le principali caratteristiche meccaniche dei materiali costituenti. Inoltre sulla base di tali risultati, si è proceduto

per via analitica a determinare la durabilità delle due pavimentazioni, individuando lo strato dove si determina la rottura per fatica ed il comportamento della pavimentazione in seguito a ciò.

A partire da quanto ottenuto, un piano mirato di esperimenti simulati è stato programmato, in base ad una tabella di connessione multipla. Infatti detta tabella, costruita mediante il calcolo delle contingenze multiple, fornisce i dati intermedi per la stima degli indici multipli di Bonferroni, i cui valori variano tra zero ed uno, ed indicano connessione maggiore per i valori più alti (di seguito, si riportano tutte le espressioni usate ¹).

Contingenze: $c_{ijk} = f_{ij} - p_i q_j r_k$ dove: $-1 \leq c_{ijk} \leq 1$

Semi – contingenza media: $C_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l |c_{ijk}|$

Indici di Bonferroni unilaterali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = \frac{C_0}{1 - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{jk}^3} ; \text{ indipendenza } 0 \leq \beta_x \leq 1 \text{ perfetta dipendenza } x = h(yz) \\ \beta_y = \frac{C_0}{1 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l Q_{ik}^3} ; \text{ indipendenza } 0 \leq \beta_y \leq 1 \text{ perfetta dipendenza } y = g(xz) \\ \beta_z = \frac{C_0}{1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij}^3} ; \text{ indipendenza } 0 \leq \beta_z \leq 1 \text{ perfetta dipendenza } z = f(xy) \end{array} \right.$$

Indici di Bonferroni trilaterali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \sqrt[3]{\beta_x \beta_y \beta_z} ; \text{ indipendenza } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ perfetta dipendenza trilaterale} \\ \beta_{-1} = \frac{3\beta_x \beta_y \beta_z}{\beta_x \beta_y + \beta_x \beta_z + \beta_y \beta_z} ; \text{ indipendenza } 0 \leq \beta_{-1} \leq 1 \text{ perfetta dipendenza trilaterale} \end{array} \right.$$

essendo: le frequenze marginali: $p_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f_{ijk} \quad \forall i$ $q_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l f_{ijk} \quad \forall j$

$$r_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ijk} \quad \forall k$$

e le frequenze marginali doppie: $P_{ij} = \sum_{k=1}^l f_{ijk} \quad \forall ij$ $Q_{ik} = \sum_{j=1}^m f_{ijk} \quad \forall ik$

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^n f_{ijk} \quad \forall jk$$

Allora date le due tabelle sotto riportate, di frequenze e contingenze, le cui dimensioni sono costituite da un numero di strati pari a 4, per ognuna delle pavimentazioni (2 blocchi), e da un

¹ Le espressioni, riportate nel prosieguo, non sono particolarmente complesse, fatto salvo riconoscere come i quadrati delle espressioni bidimensionali siano stati sostituiti dai cubi nelle espressioni tridimensionali, positivi perché riferiti a frequenze e/o probabilità, ed invece rappresentanti geometricamente volumi nello spazio 3D, anziché aree nel piano.

numero trattamenti pari a 3 (condizioni di rottura per fatica di uno strato), gli indici multipli di Bonferroni monolaterali (per righe, colonne e pile) e trilaterali (geometrico ed armonico) risultano:

0.511 0.511 0.514 0.512 0.512

	A			B			A			B		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
I	2	2	0	2	0	0	0.042	0.042	-0.042	0.042	-0.042	-0.042
II	2	2	0	2	0	0	0.042	0.042	-0.042	0.042	-0.042	-0.042
III	0	0	2	0	2	2	-0.042	-0.042	0.042	-0.042	0.042	0.042
IV	0	0	2	0	2	2	-0.042	-0.042	0.042	-0.042	0.042	0.042

Questi valori sono abbastanza elevati, anche se non elevatissimi, e danno comunque ragione per continuare uno studio puntuale del fenomeno in esame, mediante l'analisi di varianza.

Analisi di varianza a tre vie senza interazioni fra le celle

Un insieme di dati stratificato due volte è raggruppabile in celle tridimensionali. L'informazione dentro le celle è rappresentata da una variabile statistica multidimensionale i cui elementi sono i valori degli attributi dell'informazione stessa. Nella tecnica di analisi di varianza si considera la varianza generale come somma di due componenti, le varianze spiegate e la varianza residua, ortogonali tra loro. Lo scopo è quello di massimizzare le varianze spiegate (che descrivono il fenomeno secondo il modello stratificato) rispetto a quella residua (che è legata, invece, al carattere statistico dei dati e, in conclusione, alla loro accidentalità).

Nell'analisi di varianza a tre vie senza interazione tra le celle, il modello funzionale adottato è il seguente, mentre il modello stocastico prevede osservazioni indipendenti e di uguale precisione:

$$\bar{a} + \hat{a}_i + \hat{a}_j + \hat{a}_k = s_{ijkl}^o + \hat{v}_{ijkl} \quad \forall i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad l = 1, \dots, L = 1$$

Nella espressione precedente I è il numero trattamenti, J è il numero di blocchi, K è il numero di strati ed $L=1$ è la dimensione della variabile statistica. Il numero complessivo di osservazioni (si veda, a riguardo, la tabella riportata più oltre assieme agli scarti - residui) è $m = I \cdot J \cdot K \cdot L = 24$, ed il numero di parametri e $n = I + J + K + 1 = 10$. A tali equazioni è necessario aggiungere alcune condizioni di vincolo, a causa della sovrapparametrizzazione dovuta ad incognite non linearmente indipendenti che determinano singolarità del sistema. Pertanto per ogni gruppo di parametri, si è imposto che la loro somma fosse esattamente nulla, ovvero una matrice di coefficienti tutti unitari a basso peso (10^{-2}) è stata addizionata alla matrice normale per ogni gruppo di parametri. I valori numerici ad esse relativi possono essere facilmente ottenuti risolvendo, a minimi quadrati, i suddetti sistemi di equazioni d'osservazione e, tramite essi, propagando le varianze delle osservazioni.

SOLUZIONE, SQM E TEST T DI STUDENT

MEDIA:					1
1	0.7426	1.3580	0.5468	2.1100	
STRATI:					4
2	-0.0578	0.5265	-0.1097	2.1100	
3	-0.0370	0.5265	-0.0703	2.1100	
4	0.0133	0.5265	0.0253	2.1100	
5	0.0815	0.5265	0.1547	2.1100	
BLOCCHI:					2
6	0.5025	1.0436	0.4815	2.1100	
7	-0.5025	1.0436	-0.4815	2.1100	

TRATTAMENTI:		3		
8	-0.2648	0.6977	-0.3796	2.1100
9	0.1123	0.6977	0.1609	2.1100
10	0.1525	0.6977	0.2186	2.1100

Dalla tabella si evidenzia ovviamente la somma nulla dei parametri di ciascun gruppo, ma soprattutto la non significatività di alcun parametro, compresa la media generale, ad eccezione di quello relativo al terzo trattamento, risultato debolmente significativo. Eppure come specificato nel prosieguo, l'analisi di varianza a tre vie è del tutto significativa. Infatti dalle stime dei parametri si ricavano, immediatamente, le varianze spiegate, relative ai trattamenti T , ai blocchi B ed agli strati S , concordemente al modello di riferimento prescelto, e la varianza residua:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I \hat{a}_i^2 \quad \sigma_B^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \hat{a}_j^2 \quad \sigma_S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \hat{a}_k^2 \quad \sigma_R^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \hat{v}_{ijkl}^2$$

dove il denominatore della varianza residua rappresenta i gradi di libertà del sistema: $\nu = I \cdot J \cdot K \cdot L - (I-1) - (J-1) - (K-1) - 1$. Un giudizio sull'analisi di varianza e sulla validità dei modelli adottati discende dalla comparazione fra la varianza spiegata e residua. In questa sede, si utilizza sempre lo schema rigido di comparazione, confrontando direttamente la varianza spiegata e la varianza residua. Di conseguenza, si ha:

ANALISI DI VARIANZA:

STRATI E TEST F DI FISHER	4	0.8126	2.9600
BLOCCHI E TEST F DI FISHER	2	0.0662	3.5900
TRATTAMENTI E TEST F DI FISHER	3	5.8052	3.2000

dove il test F di Fisher passa per quanto riguarda i trattamenti, ovviamente significativi che caratterizzano la prova in esame (e danno senso e significato all'intero trattamento statistico dei dati), mentre lo stesso test non passa per quanto riguarda sia gli strati che i blocchi. Eppure è possibile rilevare come gli strati diano un po' più di significato al test, rispetto ai blocchi, in quanto cambiare strato vuol dire operare ad un diverso livello di profondità, mentre cambiare blocco vuol dire cambiare materiale che le prove simulate a fatica vogliono dimostrare sostanzialmente equivalenti e sostituibili, di conseguenza, essendo il secondo più conveniente, da diversi punti di vista operativi.

Queste considerazioni danno ragione della effettiva validità dell'analisi di varianza, rispetto al semplice test di significatività dei parametri, effettuato con la distribuzione t di Student. In effetti, confrontando qualitativamente la varianza a priori con il sigma zero a posteriori si può osservare una significativa riduzione della dispersione (a riguardo, si noti che, data la loro stretta dipendenza, potrebbero essere confrontati solo in termini non - parametrici) ed il test chi quadrato passa con un'abbondanza addirittura sbalorditiva:

MEDIA, SQM E N. DATI E PARAMETRI	1.1855	0.3908	20	10
GDL, SIGMA ZERO E TEST CHI QUADRATO	17	0.2085	30.2000	

Controlli numerici danno ragione della sostanziale correttezza del modo di procedere. Infatti tanto il numero di condizione del sistema (calcolato sulla norma dell'estremo superiore delle matrici normale ed inversa), quanto le ridondanze locali delle singole osservazioni (calcolate in base al teorema di decomposizione ortogonale della varianza) sono relativamente elevati:

NUMERO DI CONDIZIONE E RIDONDANZE LOCALI	0.6369	0.7083
--	--------	--------

cosa che ben garantisce di una sufficiente lontananza tanto dalla condizione di singolarità e mal – condizionamento del sistema, quanto dalla condizione di inaffidabilità e non – controllabilità delle singole osservazioni. Da ultimo per quanto riguarda l'eventuale presenza di dati anomali, occorre segnalare come il test tau di Thompson non evidenzia alcuna osservazione, su ventiquattro, oltre la soglia di criticità, cosa che assicura della sufficiente bontà dei dati ed esclude particolari necessità di eliminare dati anomali, prima di effettuare il calcolo di statistiche ottimali.

Nell'immediato prosieguo, si riportano le stime delle osservazioni compatibili con il modello funzionale adottato, precedute dai valori delle osservazioni e seguite dal loro scarto quadratico medio, nonché gli scarti – residui delle equazioni d'osservazione.

DATI, STIME, SQM, SCARTI, SQM, TEST TAU DI THOMPSON

1	0.6828	0.9224	0.1126	0.2396	0.1755	1.3653
2	0.7032	0.9432	0.1126	0.2400	0.1755	1.3672
3	0.7466	0.9935	0.1126	0.2469	0.1755	1.4068
4	0.8056	1.0617	0.1126	0.2561	0.1755	1.4589
5	0.4522	1.2996	0.1126	-0.1526	0.1755	-0.8697
6	1.4639	1.3203	0.1126	-0.1436	0.1755	-0.8182
7	1.5347	1.3706	0.1126	-0.1641	0.1755	-0.9347
8	1.5503	1.4388	0.1126	-0.1115	0.1755	-0.6354
9	1.4522	1.3398	0.1126	-0.1124	0.1755	-0.6403
10	1.4639	1.3606	0.1126	-0.1033	0.1755	-0.5888
11	1.5347	1.4109	0.1126	-0.1238	0.1755	-0.7053
12	1.5503	1.4790	0.1126	-0.0713	0.1755	-0.4060
13	0.1650	-0.0825	0.1126	-0.2475	0.1755	-1.4100
14	0.1902	-0.0617	0.1126	-0.2519	0.1755	-1.4355
15	0.2176	-0.0114	0.1126	-0.2290	0.1755	-1.3047
16	0.3109	0.0567	0.1126	-0.2542	0.1755	-1.4481
17	0.1500	0.2946	0.1126	0.1446	0.1755	0.8241
18	0.1732	0.3154	0.1126	0.1422	0.1755	0.8101
19	0.2203	0.3657	0.1126	0.1454	0.1755	0.8286
20	0.2943	0.4339	0.1126	0.1396	0.1755	0.7952
21	0.2067	0.3349	0.1126	0.1282	0.1755	0.7305
22	0.2389	0.3556	0.1126	0.1167	0.1755	0.6651
23	0.2815	0.4060	0.1126	0.1245	0.1755	0.7093
24	0.4328	0.4741	0.1126	0.0413	0.1755	0.2355

Si noti altresì come, essendo tutti uguali gli scarti quadratici medi delle stime suddette, il teorema di decomposizione ortogonale della varianza faccia sì che anche lo scarto quadratico medio di tutti gli scarti residui sia sempre uguale e pari a 0.7083.

Infine giova ribadire come i test di validazione dei modelli, quali quelli qui presentati e svolti, permettano di sottoporre a verifica, mediante opportuni controlli e confronti d'ipotesi, le stime effettuate come, del resto, tutti i risultati ottenuti nell'ambito della statistica.

Analisi fattoriale

L'analisi fattoriale completa lo studio, in questo caso specifico, iniziato con l'analisi di varianza, effettuando la decomposizione spettrale (cioè separando autovalori ed autovettori) del sistema normale corrispondente, così da stabilire numeri minimi di parametri che sono capaci di spiegare il fenomeno con una certa precisione. Lo stesso studio può altresì essere compiuto mediante la decomposizione ai valori singolari del sistema di equazioni d'osservazione equipeseate, tuttavia questa via, se non necessaria per problemi di stabilità numerica, è computazionalmente più onerosa.

Si osservi, a riguardo, come l'equipesatura delle equazioni d'osservazione sia banale, se il modello stocastico è costituito dai pesi delle equazioni, mentre richiede la radice pari della matrice dei cofattori (ovvero della matrice di covarianza delle osservazioni, a meno del fattore di proporzionalità la cui radice quadrata è solitamente detta sigma zero), se sono presenti correlazioni tra le osservazioni. In ogni caso, come evidente nell'immediato prosieguo, i valori singolari della matrice disegno equipesata A_p sono la radice quadrata degli autovalori della matrice normale C :

$$C = R^T A R$$

$$A_p = Q S T$$

dove A è una matrice diagonale, contenente gli autovalori della matrice normale, ed R una matrice quadrata ortonormale, contenente gli autovettori della stessa matrice, mentre S è una matrice rettangolare diagonale (alta) con la stessa forma della matrice disegno, contenente i valori singolari della sopraccitata matrice disegno, essendo Q e T due matrici quadrate ortonormali di forma prodotto compatibile con la matrice disegno, contenenti gli autovettori della suddetta matrice².

A partire dalla matrice normale, il calcolo degli autovalori può essere molto semplicemente effettuato eseguendo, nell'ordine, una sequenza di due operazioni matriciali, costituite da:

- una fattorizzazione di Cholesky;
- un prodotto matriciale dei due fattori di Cholesky commutati,

$$C_1 = C$$

come di seguito riportato:

$$T_i : T_i^T T_i = C_i \quad i = 1, 2, \dots$$

$$C_{i+1} = T_i T_i^T$$

Ad ogni passo, la matrice risultante tende a farsi diagonale, facendo via, via diminuire gli elementi extra – diagonali. Il procedimento iterativo è arrestato, quando l'elemento extra – diagonale più grande è inferiore, in valore assoluto, ad un'opportuna soglia prefissata. Ad es., in questo caso specifico, dato un sistema di 9 equazioni in 9 incognite, derivato da quello scritto per l'analisi di varianza, eliminando l'incognita della media generale ed addizionando un numero piccolissimo (pari a 10^{-5} ed uguale alla soglia prefissata) a tutti gli elementi diagonali principali, come condizione di regolarizzazione della soluzione cercata³, il procedimento iterativo si è arrestato dopo solo 25 iterazioni con un residuo di 1.588D-05. Si riportano, di seguito, gli autovalori trovati ed i loro valori frazionari, rapportati all'unità riferita alla somma.

<u>AUTOVALORI E VAL. FRAZIONARI</u>					
			5	6.0D+00	0.833
1	1.0D-05	0.000	6	8.0D+00	1.111
2	1.0D-05	0.000	7	8.0D+00	1.111
3	6.0D+00	0.833	8	1.2D+01	1.667
4	6.0D+00	0.833	9	2.6D+01	3.611

Un primo commento prende atto che, tante volte, sono d'interesse solo gli autovalori e non gli autovettori, come spesso solo le varianze principali e non le loro direzioni, ed allora la strada percorsa, davvero così semplice, sembra davvero molto promettente.

² Si osservi inoltre come si abbia: $T=R$ e $Q=A_p T^T S$, essendo S l'inversa generalizzata di S , costruita con gli inversi dei valori singolari e ponendo elementi nulli, dove i valori singolari sono nulli, perché lo zero è inverso generalizzato di se stesso; si noti poi la non unicità di Q , causata dalla non unicità di S , per cui è corretto dire una famiglia di autovettori.

³ Come noto, esistono ovviamente altre vie alternative, ad es., con l'uso delle matrici inverse generalizzate, ma questa condizione di regolarizzazione della soluzione cercata è innegabilmente molto semplice e ben adatta allo scopo.

Un secondo commento fa riferimento alle dimensioni dei problemi, oggetto di studio, e rileva come l'analisi fattoriale debba essere doverosamente riservata alla selezione di piccoli gruppi di parametri, eventualmente di sotto-problemi, dove ha sicuro interesse.

D'altra parte, non avrebbe senso domandarsi se serve un parametro in più o in meno nella compensazione di una struttura reticolare con decine di migliaia di incognite (ad es., come in un blocco con un gran numero di immagini, oppure in una lunga sequenza sempre di immagini) o nella modellazione digitale di una superficie con centinaia di migliaia di incognite, oppure addirittura nel filtraggio di un'immagine con milioni di incognite.

Infatti in tutti questi casi, le varie incognite hanno anche un significato geometrico e/o fisico specifico, mentre dove la spiegazione è più vaga ed incerta, allora ha senso mettere in gioco alcuni parametri e domandarsi, quale è il numero minimo di parametri per raggiungere una certa spiegazione.

Il calcolo degli autovettori è un po' più complesso e può essere effettuato mediante l'esecuzione ripetuta di tante rotazioni elementari di Jacobi, fino ad ottenere nuovamente la matrice diagonale degli autovalori ed inoltre la matrice degli autovettori, come prodotto destro di tutte le rotazioni elementari di Jacobi (essendo il prodotto sinistro, con la rotazione elementare di Jacobi inversa, la matrice trasposta della matrice degli autovettori trovata). Esso si articola in tre passaggi:

- selezione dell'elemento extra – diagonale massimo, da annullare:

$$-a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha + c \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2b}{c-a}$$

essendo b l'elemento extra – diagonale da annullare
ed a, c i corrispondenti elementi diagonali principali;

- applicazione della rotazione elementare di Jacobi alla matrice data e via, via trasformata:

detti (h, h') gli indici dell'elemento da annullare,
tutti gli elementi restano invariati, tranne quelli appartenenti
alle righe ed alle colonne h, h' che sono così modificati:

$$\begin{aligned} c_{hh} &= \cos^2 \alpha c_{hh} + \sin^2 \alpha c_{h'h'} + 2 \sin \alpha \cos \alpha c_{hh'} \\ c_{h'h'} &= \sin^2 \alpha c_{hh} + \cos^2 \alpha c_{h'h'} - 2 \sin \alpha \cos \alpha c_{hh'} \\ c_{hh'} &= 0 \\ c_{ih} &= \cos \alpha c_{ih} + \sin \alpha c_{ih'} \quad \forall i \neq h, h' \\ c_{ih'} &= -\sin \alpha c_{ih} + \cos \alpha c_{ih'} \\ c_{hj} &= \cos \alpha c_{hj} + \sin \alpha c_{h'j} \quad \forall j \neq h, h' \\ c_{h'j} &= -\sin \alpha c_{hj} + \cos \alpha c_{h'j} \end{aligned}$$

dove qui, come al passo precedente, è relativamente facile ottenere tutte le espressioni cercate, facendo uso del prodotto di Kronecker che permette di eseguire velocemente il prodotto di tre matrici,

- prodotto destro delle rotazioni elementari trovate, rimanendo invariati tutti gli altri elementi:

$$\begin{aligned} r_{ih} &= \cos \alpha r_{ih} + \sin \alpha r_{ih'} \\ r_{ih'} &= -\sin \alpha r_{ih} + \cos \alpha r_{ih'} \end{aligned}$$

Ad ogni passo, la matrice risultante annulla l'elemento selezionato, ovvero il massimo elemento extra – diagonale ⁴, ancora una volta, facendo diminuire tutti gli elementi extra – diagonali. Il procedimento iterativo è arrestato, quando l'elemento extra – diagonale più grande è inferiore, in valore assoluto, ad un'opportuna soglia prefissata. Ad es., in questo caso specifico, dato lo stesso sistema di 9 equazioni in 9 incognite, il procedimento iterativo si è arrestato dopo ben 91 iterazioni con un residuo di 2.424D-10, avendo dovuto fissare come soglia d'arresto del ciclo iterativo un numero ancora più piccolo, pari a 10⁻¹⁰, pena la non convergenza del procedimento iterativo. Si riporta, di seguito, la matrice degli autovettori trovata.

MATRICE DEGLI AUTOVETTORI

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.454	0.158	0.000	0.000	0.000	0.413	-0.705	0.000	0.320
2	0.454	0.158	0.000	0.000	0.000	0.404	0.710	0.000	0.320
3	0.454	0.158	0.000	0.000	0.000	-0.816	-0.005	0.000	0.320
4	-0.437	0.280	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.707	0.480
5	-0.437	0.280	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.707	0.480
6	-0.017	-0.438	0.741	-0.370	-0.253	0.000	0.000	0.000	0.240
7	-0.017	-0.438	-0.670	-0.453	-0.310	0.000	0.000	0.000	0.240
8	-0.017	-0.438	-0.036	0.811	-0.302	0.000	0.000	0.000	0.240
9	-0.017	-0.438	-0.035	0.012	0.865	0.000	0.000	0.000	0.240

Il calcolo delle componenti principali prevede la soluzione di più sistemi, a partire da quello con tutti gli autovalori trovati (che ovviamente dà proprio la stessa soluzione a minimi quadrati), per proseguire annullando progressivamente alcuni autovalori, incominciando dai più piccoli, così da vedere quanto si degrada via, via la soluzione stessa ⁵. Allora con specifico riferimento al caso in esame, di seguito, si riportano le soluzioni alle componenti principali, senza togliere alcun autovalore, togliendo due autovalori nulli, poi altri tre non troppo grandi ed infine altri due un po' più grandicelli. Le soluzioni ottenute mostrano che anche solo 4 parametri bastano a spiegare circa il 75% della variabilità presente nei dati, senza sostanziali perdite di precisione.

SOLUZIONI E SQM ALLE COMPONENTI PRINCIPALI

VALORI SINGOLARI ANNULLATI:	2	5	7
N. EQUAZIONI E INCOGNITE	24 – 9	24 – 7	24 – 4
RIDONDANZE:	15	17	20
SIGMA ZERO	0.222	0.222	0.232

SOLUZIONI E SQM

1	-0.036	0.062	-0.036	0.062	-0.036	0.059	0.228	0.017
2	0.341	0.062	0.341	0.062	0.341	0.059	0.228	0.017
3	0.381	0.062	0.381	0.062	0.381	0.059	0.228	0.017
4	0.845	0.047	0.845	0.047	0.845	0.045	0.845	0.062
5	-0.160	0.047	-0.160	0.047	-0.160	0.045	-0.160	0.062
6	0.114	0.074	0.114	0.074	0.171	0.009	0.171	0.013
7	0.134	0.074	0.134	0.074	0.171	0.009	0.171	0.013
8	0.185	0.074	0.185	0.074	0.171	0.009	0.171	0.013
9	0.253	0.074	0.253	0.074	0.171	0.009	0.171	0.013

⁴ Si noti come la ricerca del massimo sia accelerata, memorizzando ad ogni passaggio, successivo al primo, il valore massimo di ogni riga. Infatti poiché l'algoritmo modifica, ad ogni passo, solo due righe e due colonne, basta eseguire un confronto a tre per tutte le righe, tranne quelle modificate, e due confronti completi, limitatamente alle due righe modificate, oltretutto cercare il massimo dei massimi.

⁵ Si noti, a riguardo, come l'inverso generalizzato, di minima norma, di un autovalore nullo sia nullo, a sua volta.

**PARTE II – UNA RICOSTRUZIONE DI SUPERIFICIE
CON UNA LINEA DI DISCONTINUITA’**

Generalità

Nell’ambito della matematica applicata e dell’informatica grafica, la ricostruzione di superficie è una procedura ormai standard, così come l’interpolazione di linee (anche chiuse, anche gobbe, a loro volta, anche chiuse), e può essere condotta con varie metodologie statistiche. Più complesso è invece il caso di una ricostruzione di superficie interessata da linee discontinuità (ad es., linee di rottura, oppure direttrici, ecc.), dove la discontinuità può essere di prima specie (ovvero un salto finito), oppure di prima specie nelle derivate prime della stessa superficie (ovvero, un cambio repentino di pendenza). Una discontinuità nella derivate seconde, sempre della stessa superficie (ovvero un cambio repentino di curvatura), è altrettanto possibile, perché costituisce una brusca variazione tra superfici gradualmente variate (cioè continue, con due derivate continue), ma forse un po’ meno rilevante, in questo caso specifico (essendo invece rilevante a livello d’interpolazione di linee, anche per gli eventuali aspetti dinamici connessi).

Un facile esempio preliminare

Dati due insiemi di punti: $\{P_i(x_i, y_i), \forall i = 1, m\}$ e $\{Q_j(x_j, y_j), \forall j = 1, n\}$, campionati su due porzioni finite di rette, appartenenti ad un unico piano, dove un punto è comune ad entrambi gli insiemi ($P_k \equiv Q_l$), per vari motivi geometrici e/o fisici, sono modellati con due modelli funzionali differenti:

$$y = E(ax + b) \quad \forall P_i \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad x = E(cy + d) \quad \forall Q_j$$

essendo, invece solitamente, il modello funzionale assunto ipotizzando osservazioni indipendenti e di uguale precisione e, di conseguenza, espresso da una semplicissima matrice identità (in ogni caso comunque, modelli stocastici più sofisticati non richiedono modifiche nella trattazione a seguire).

E’ evidente che la forma più semplice per imporre la suddetta coincidenza (cioè $P_k \equiv Q_l$) è espressa dalla uguaglianza delle due coordinate: $x_k \equiv x_l$ e $y_k \equiv y_l$, che si traduce in due equazioni di vincolo o, più semplicemente, in due equazioni di pseudo – osservazione sovrapposte. Eppure proprio queste due semplicissime equazioni, impongono di considerare osservabili, in entrambe le equazioni d’osservazione del sopraccitato modello funzionale, tanto le coordinate x , quanto le coordinate y . D’altra parte, se come detto i punti appartengono ad un piano (geometrico o topografico, ecc.), forse è proprio corretto considerare osservabili entrambe le coordinate che molto probabilmente sono state rilevate con identiche tecniche di rilevamento. Un discorso diverso potrebbe invece essere fatto per una serie temporale, dove il tempo è misurato con precisioni solitamente ben superiori, rispetto ad altre entità rilevate (ad es., fisiche, ambientali, antropiche, demografiche, urbanistiche, economiche, sociali), ad esso collegate.

Pertanto la linearizzazione dei due modelli funzionali proposti, scritta con le convenzioni dell’analisi matematica, cioè prescindendo dalla formulazione corretta degli stessi modelli funzionali, nonché dalla evidenziazione in essi di quantità osservate, parametri incogniti e numeri, diventa:

$$\tilde{y} + \delta y = (\tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}) + \tilde{a} \delta x + \tilde{x} \delta a + \delta b \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad \tilde{x} + \delta x = (\tilde{c}\tilde{y} + \tilde{d}) + \tilde{c} \delta y + \tilde{y} \delta c + \delta d$$

Allora essendo evidentemente le nuove incognite le correzioni $\delta \bullet$, è necessario procurarsi, per una via qualsiasi, i valori approssimati delle incognite $\tilde{\bullet}$, scrivere anche le due uguaglianze di coordinate ($x_k = x_l$ e $y_k = y_l$) per il punto comune, nelle stesse incognite:

$$\tilde{x}_k + \delta x_k = \tilde{x}_l + \delta x_l \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad \tilde{y}_k + \delta y_k = \tilde{y}_l + \delta y_l$$

e, nelle stesse incognite, scrivere anche quattro equazioni d'osservazione dirette, per le quattro coordinate osservate dei punti: $\{P_i, \forall i = 1, m\}$ e $\{Q_j, \forall j = 1, n\}$; oltretutto le uniche equazioni d'osservazione, perché le equazioni delle due rette sono diventate equazioni di vincolo, essendo prive di quantità osservate:

$$\begin{array}{lcl} \tilde{x}_k + \delta x_k = x_k^0 & e & \tilde{y}_k + \delta y_k = y_k^0 \\ \tilde{x}_l + \delta x_l = x_l^0 & e & \tilde{y}_l + \delta y_l = y_l^0 \end{array}$$

Dopodiché corre il dovere di segnalare innanzitutto due importanti precisazioni, rispettivamente linguistiche e di notazione. Infatti come già detto in precedenza, le equazioni di vincolo sono spesso sostituite, essenzialmente per motivi di praticità, con equazioni di pseudo – osservazioni sovrappesate, capaci anche di esprimere pseudo – osservazioni di peso qualsiasi (inutili in questo caso specifico, ma più generali e particolarmente indicate per modellare parametri di servizio, osservabili secondarie e condizioni geometriche di regolarizzazione). Inoltre una certa libertà espressiva, ha voluto mettere in evidenza, con il simbolo \bullet^0 , dove compaiono le quantità osservate, prescindendo dal mettere in evidenza che, in generale, le stesse non soddisfano le equazioni d'osservazione ed allora è necessario introdurre le variabili, cosiddette scarti – residui (v), per correggere le suddette quantità osservate e renderle compatibili con le equazioni d'osservazione ($\bullet = \bullet^0 + v$).

Infine e soprattutto è necessario segnalare che, nelle equazioni d'osservazione diretta, è necessario porre particolare attenzione nella scelta dei valori approssimati delle incognite \bullet . Infatti una scelta consueta, quasi spontanea, è scegliere questi valori proprio uguali alle corrispondenti quantità osservate: $\bullet = \bullet^0$. Gli aggettivi: consueto e spontaneo, appena smorzato dall'avverbio: quasi, ricordano quanto è comune in molte applicazioni geomatiche (ad es., in fotogrammetria analitica nella compensazione della triangolazione aerea a modelli indipendenti con il metodo anblock). Eppure questa scelta porta ad avere tutti i termini noti nulli identicamente e, di conseguenza, a correzioni delle incognite nulle, ovvero a parametri incogniti perfettamente coincidenti con i loro valori approssimati. Tutto ciò può essere vero, in qualche rarissima situazione (ad es., se i punti campionati fossero ottenuti da una digitalizzazione esatta di porzioni di rette, ma allora a cosa servirebbe ricostruirle, bastando farle passare per due soli punti!).

Un'alternativa vantaggiosa prevede che i valori approssimati delle incognite possano essere facilmente calcolati seguendo varie vie, differenti tra loro, ma tali da non produrre tutti i termini noti identicamente nulli, quali ad esempio:

- ❑ far passare le rette per due loro punti qualsiasi ed interpolare gli altri a posteriori: allora due termini noti sono nulli, ma non tutti gli altri, in generale;
- ❑ calcolare separatamente le rette a minimi quadrati, cosicché tutti i termini noti siano piccoli (se non sono presenti dati anomali negli insiemi di punti), ma nessuno nullo, in generale;
- ❑ calcolare separatamente le rette mediante opportune procedure robuste (se si sospetta la presenza di dati anomali): allora al più due termini noti sono nulli, ma non tutti gli altri, in generale;
- ❑ scegliere valori approssimati qualsiasi, purché prossimi, cosicché tutti i termini noti siano non – nulli, anche se la convergenza ai valori attesi potrebbe essere più lenta.

Da ultimo, si osservi come l'intera procedura sia non – lineare e, in ogni caso, richieda di procedere a successive iterazioni, al fine di giungere alla convergenza ai valori attesi, controllata spesso con una norma dell'estremo superiore od altrimenti fermata per mancata convergenza.

La ricostruzione di un DSM con una linea di rottura

Completata la presentazione di un esempio preliminare, è possibile procedere ad illustrare, in

parallelo, la ricostruzione di una superficie con linee di discontinuità, senza precisare la forma analitica del modello funzionale adottato (per motivi di generalità della trattazione) e la ricostruzione di un DSM (cioè un modello digitale di superficie), con una funzione cubica cilindrica in una direzione e quadratica nell'altra ortogonale, percorsa da una linea di rottura piana (ma sarebbe stato ugualmente possibile studiarla gobba, se l'esempio illustrato numericamente, nel seguito, l'avesse permesso), studiata attraverso una spezzata di linee rette. La scelta di affiancare, da subito, nella sua forma analitica, l'esempio proposto serve a chiarire ulteriormente quanto potrebbe apparire troppo ermetico, nella modellazione fatta prescindendo dalla forma analitica del modello funzionale adottato. D'altra parte, la generalità della trattazione intende chiarire, come quanto trattato non trovi limitazioni di sorta con metodi deterministici o stocastici, oppure misti. Pertanto la ricostruzione di una generica superficie e quella del sopraccitato DSM presentano i due seguenti modelli funzionali, a loro volta, facilmente linearizzati (avendo indicato con la lettera h il generico parametro di un generico modello):

$$z = g(x, y) \qquad \tilde{z} + \delta z = \tilde{g} + \sum_i g_{h_i} \delta h_i + g_x \delta x + g_y \delta y$$

$$z = a + (bx + cx^2 + dx^3) + (ey + fy^2)$$

$$\tilde{z} + \delta z = \left((\tilde{b}\tilde{x} + \tilde{c}\tilde{x}^2 + \tilde{d}\tilde{x}^3) + (\tilde{e}\tilde{y} + \tilde{f}\tilde{y}^2) \right) + a + \tilde{x} \delta b + \tilde{x}^2 \delta c + \tilde{x}^3 \delta d + \tilde{y} \delta e + \tilde{y}^2 \delta f +$$

$$+ (\tilde{b} + 2\tilde{c}\tilde{x} + 3\tilde{d}\tilde{x}) \delta \tilde{x} + (\tilde{e} + 2\tilde{f}\tilde{y}) \delta \tilde{y}$$

Analogamente l'interpolazione di generiche linee di discontinuità e quella della sopraccitata linea di rottura presentano i due seguenti modelli funzionali, ancora facilmente linearizzati (avendo indicato con la lettera s l'ascissa curvilinea della linea in esame):

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{x} + \delta x = \tilde{f} + \sum_i f_{f_i} \delta f_i + f_s \delta s & \tilde{y} + \delta y = \tilde{g} + \sum_i g_{g_i} \delta g_i + g_s \delta s \\ \tilde{z} + \delta z = \tilde{h} + \sum_i h_{h_i} \delta h_i + h_s \delta s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p_j + q_j y \quad \forall j \\ z = f.data \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{x} + \delta x = \tilde{q}_j \tilde{y} + p_j + \tilde{y} \delta q_j + \tilde{q}_j \delta y \quad \forall j \\ \tilde{z} + \delta z = f.data \end{cases}$$

Dopodiché per completare entrambi i modelli funzionali, occorre introdurre le equazioni d'osservazione dirette per le coordinate dei due insiemi di dati, campionati rispettivamente per una ricostruzione di superficie e l'interpolazione di linee di discontinuità (dove il simbolo \bullet^0 serve ancora ad indicare quantità osservate):

$$\begin{cases} x = x^0 \\ z = z^0 \end{cases} \quad ; \quad y = y^0 \qquad \begin{cases} \tilde{x} + \delta x = x^0 \\ \tilde{z} + \delta z = z^0 \end{cases} \quad ; \quad \tilde{y} + \delta y = y^0$$

Inoltre per riunire in un unico sistema la ricostruzione di superficie e l'interpolazione di linee di discontinuità, è necessario scrivere anche le equazioni di vincolo (ovvero e meglio le equazioni di pseudo - osservazione sovrappesate), relativamente alle coordinate comuni nei due insiemi:

$$\begin{cases} x_k \equiv x_l \\ y_k \equiv y_l \\ z_k \equiv z_l \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} P_k \in \{P_l\} \\ Q_l \in \{Q_j\} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{x}_k + \delta x_k \equiv \tilde{x}_l + \delta x_l \\ \tilde{y}_k + \delta y_k \equiv \tilde{y}_l + \delta y_l \\ \tilde{z}_k + \delta z_k \equiv \tilde{z}_l + \delta z_l \end{cases}$$

Infine è proprio indispensabile e fondamentale ripetere quanto già sottolineato a proposito della ricerca dei valori approssimati delle coordinate approssimate. Infatti essendo solo le equazioni d'osservazioni dirette le uniche equazioni contenenti quantità osservate, è necessario fare attenzione a non costruire tutti i termini noti identicamente nulli, così come accadrebbe, se si scegliessero, quali valori approssimati delle coordinate approssimate, proprio le stesse quantità osservate delle coordinate dei punti. Invece se i valori approssimati delle coordinate approssimate sono ottenute, ad esempio, eseguendo separatamente la ricostruzione di superficie e l'interpolazione delle linee di discontinuità, con il metodo dei minimi quadrati, allora tutti i termini noti sono piccoli (se non sono presenti dati anomali negli insiemi di punti), ma nessuno nullo, in generale. Ovviamente altre procedure sono ammissibili, come già detto in precedenza, bastando solo non ottenere tutti i termini noti identicamente nulli.

Un esempio numerico

La ricostruzione di una superficie di variazioni d'altezza, tra giorno e notte, di una lastra in calcestruzzo e l'interpolazione di una linea di rottura che purtroppo percorre, quasi al centro, la lastra stessa costituiscono un esempio reale, utile per mettere in evidenza i risultati numerici ottenuti. A riguardo, è opportuno fare alcune precisazioni. Il rilevamento dei punti è ben lungi dall'essere ottimale: sembra fatto da un geometra, senza un preciso progetto di uno schema di rilievo adeguato, oppure anche da un ingegnere, ma con la cultura di un geometra (e non dei migliori!). D'altra parte, questo è un esempio reale e, di conseguenza, è stato preferito ad un, forse perfetto, esempio simulato ad arte. Invece pur nella sua semplicità l'esempio è abbastanza invasivo, cosicché una scelta ragionevole intende presentare solo pochi risultati, tra i più significativi, rinunciando a riportare lunghissimi ed illeggibili elenchi di numeri che potrebbero solo invitare a saltare la loro lettura.

Un discorso preliminare riprende un'osservazione già formulata, almeno in parte, se i punti appartengono ad uno spazio 3D (geometrico o topografico, ecc.), allora è più corretto considerare osservabili le tre coordinate che molto probabilmente sono state rilevate con identiche tecniche di rilevamento. Infatti mentre le più antiche tecniche topografiche separavano planimetria ed altimetria, dove accuratezza e precisione della seconda erano ben inferiori a quelle della prima, tutto ciò non è più vero con le più moderne tecniche geodetiche. In questo caso, il GPS ed altre tecniche geospaziali sono essenzialmente 3D ed accuratezza e precisione di planimetria ed altimetria sono pressoché comparabili (e comunque non tali da considerare la planimetria come quasi certa, rispetto ad un'altimetria da modellare statisticamente). Inoltre lo strettissimo legame tra geodesia e topografia, dato soprattutto dall'impiego del GPS, estende il discorso anche alle scale grandissime ed agli oggetti fuori dagli ambiti geodetici.

Lo stesso discorso può essere fatto per il rilevamento fotogrammetrico. Infatti mentre la fotogrammetria terrestre antica (fatta con camere lucide e fototeodoliti) separava planimetria ed altimetria, differenziandole per quanto riguarda precisione ed accuratezza, la fotogrammetria aerea e terrestre moderna supera questa separazione. Essa è superata, in fotogrammetria aerea, già con immagini analogiche, purché lo schema di ripresa realizzi angoli retti tra raggi omologhi, e la stessa separazione si mantiene con immagini digitali, sotto le stesse condizioni di presa. La stessa separazione è superata, in fotogrammetria terrestre, in particolare con immagini digitali. Inoltre se le condizioni di presa realizzano angoli retti tra raggi omologhi, allora accuratezza e precisione sono comparabili anche per la coordinata terrestre che esprime la profondità di campo. Infine data la sempre maggiore vicinanza tra fotogrammetria digitale e telerilevamento (compreso il cosiddetto proximal sensing), il discorso fatto è naturalmente esteso.

Un secondo discorso riguarda la distinzione tra errori d'osservazione ed errori di modello (cui appellarsi per fare una separazione). Tuttavia anche questo discorso, pur certamente non trascurabile, viene meno in molti casi, come di seguito riportato:

- ❑ modelli digitali di superficie (DSM) oggetti non geodetici;

- modelli digitali di superficie (DSM) per manufatti, rappresentati a grandissima scala;
- modelli digitali delle altezze (DEM) con:
 - linee dirette e/o di rottura;
 - descrittori di forma;
 - trasformazioni tra diversi sistemi di riferimento;
 - mapping figure, mappe e/o modelli 3D;
 - matching di immagini;
 - approcci integrati;
- modelli digitali di parametri morfologici (DTM);
- modelli digitali, diversi da serie temporali (per le quali si è già detto), di altre grandezze.

Infine resta da precisare la sopraccitata distinzione, tra errori di misura ed errori di modello, in quanto i primi sono dovuti tecnologie di rilevamento, mentre i secondi a problemi di modellazione, ovvero alla scelta di metodologie e procedure della statistica (deterministiche o stocastiche, oppure miste).

OSSERVAZIONI DEFORMATA

Punto	X	Y	ΔZ	
1	0.000	0.000	8.000	
2	0.000	7500.000	11.000	
3	295.000	3675.000	6.000	
4	775.000	3675.000	4.000	
5	1255.000	3675.000	3.000	
6	2220.000	3675.000	2.000	
7	3190.000	3675.000	3.000	
8	3660.000	3675.000	4.000	N. DATI 1ª SERIE 8
9	4640.000	3675.000	2.000	
10	5610.000	3675.000	2.000	
11	6575.000	3675.000	5.000	
12	7065.000	3675.000	7.000	
13	7500.000	0.000	7.000	
14	7500.000	7500.000	9.000	N. DATI 2ª SERIE 7

OSSERVAZIONI FESSURA

Punto	X	Y	ΔZ	
1	3257.000	0.000	4.300	
2	3247.000	280.000	4.100	
3	3174.000	760.000	4.000	
4	3096.000	1240.000	3.900	N. DATI 1° GRUPPO 4
5	3105.000	1720.000	3.900	
6	3214.000	210.000	3.900	
7	3323.000	2695.000	4.000	
8	3497.000	3175.000	4.000	
9	3542.000	3230.000	4.000	
10	3660.000	3675.000	4.000	N. DATI 2°

				GRUPPO 7
11	3649.000	4130.000	4.000	
12	3571.000	4610.000	4.000	
13	3542.000	4775.000	4.000	
14	3498.000	5095.000	4.000	
15	3434.000	5575.000	3.900	N. DATI 3° GRUPPO 6
16	3446.000	6060.000	3.900	
17	3490.000	6540.000	3.900	
18	3575.000	7020.000	4.000	N. DATI 4° GRUPPO 4
19	3550.000	7295.000	4.100	
20	3549.000	7500.000	4.200	N. DATI 5° GRUPPO 3

INTERPOLAZIONE DEFORMATA

SIGMA ZERO	0.165
N.CONDIZIONE	1.2E+24
N. OSSERVAZIONI	16
N. PARAMETRI	12
RIDONDANZA	4

INTERPOLAZIONE FESSURA

SIGMA ZERO	40.724
N.CONDIZIONE	5.0D+11
N. OSSERVAZIONI	28
N. PARAMETRI	10
RIDONDANZA	18

INTERPOLAZIONE CONGIUNTA

SIGMA ZERO	24.224
N.CONDIZIONE	2.3D+26
N. OSSERVAZIONI	188
N. PARAMETRI	139
RIDONDANZA	49

PARAMETRI E SQM (PRIMA E SECONDA SERIE)

Parametro	1ª serie	sqm	2ª serie	sqm
00	-1.45E-08	2.42E+01	-1.13E-04	2.57E-02
01	7.41E-04	1.00E-01	1.51E-08	3.37E-06
02	-5.92E-07	5.88E-05	-1.94E+01	1.23E+03
03	1.24E-10	9.66E-09	8.17E-03	7.13E-01
10	-1.13E-04	2.57E-02	-9.55E-07	1.36E-04
20	1.51E-08	3.37E-06	2.84E-11	8.40E-09

PARAMETRI E SQM (PRIMO, SECONDO, TERZO, QUARTO E QUINTO GRUPPO)

Parametro	1° gruppo	sqm	2° gruppo	sqm	3° gruppo	sqm
0	3.28E+03	3.16E-03	2.74E+03	3.37E-03	4.04E+03	1.15E-02
1	3.36E+00	1.47E+01	-4.50E+00	6.76E+01	4.84E+00	4.10E+02

Parametro	4° gruppo	sqm	5° gruppo	sqm
0	2.98E+03	5.71E-02	3.73E+03	2.42E+01
1	8.30E-02	2.42E+01	-2.43E-02	2.42E+01

OSSERVAZIONI DIRETTE E SQM (DEFORMATA)

Punto	Deformata	X	sqm	Y	sqm	ΔZ	sqm
1	0.000	0.000	24.224	0.000	24.224	8.000	24.224
2	0.000	0.000	24.224	7500.000	24.224	11.000	24.224
3	295.000	295.000	24.224	3675.000	24.224	5.958	23.179
4	775.000	775.001	24.224	3675.000	24.224	4.064	15.864
5	1255.000	1255.000	24.224	3675.000	24.224	3.030	18.110
6	2220.000	2220.000	24.224	3675.000	24.224	1.870	18.668
7	3190.000	3190.000	24.224	3675.000	24.224	3.148	17.627
8	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
8	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
9	4640.000	4640.000	24.224	3675.000	24.224	4.327	21.485
10	5610.000	5609.999	24.224	3675.000	24.224	4.932	17.493
11	6575.000	6575.001	24.224	3675.000	24.224	7.643	18.323
12	7065.000	7065.002	24.224	3675.000	24.224	9.205	18.502
13	7500.000	7499.999	24.224	0.000	24.224	7.173	23.578
14	7500.000	7500.000	24.224	7500.000	24.224	11.043	24.189

Ridondanze locali: (1) 0.000 (2) 0.000 (3) 0.084 (4) 0.571 (5) 0.441
(6) 0.406 (7) 0.470 (8) 0.758
(8) 0.758 (9) 0.213 (10) 0.479 (11) 0.428 (12) 0.417 (13) 0.053 (14) 0.053

OSSERVAZIONI DIRETTE E SQM (FESSURA)

Punto	Fessura	X	sqm	Y	sqm	ΔZ	sqm
1	3257.000	3259.065	11.860	5.532	23.884	4.884	24.224
2	3247.000	3250.379	11.095	277.431	23.870	4.687	24.224
3	3174.000	3177.654	9.808	753.861	23.850	4.884	24.224
4	3096.000	3095.882	7.514	1251.431	14.433	5.013	17.129
4	3096.000	3095.882	7.514	1251.431	14.433	5.013	17.129
5	3105.000	3099.043	9.077	1707.012	23.591	5.126	24.224
6	3214.000	3207.557	8.087	2194.425	23.569	4.994	24.224
7	3323.000	3316.138	7.264	2677.121	23.553	4.975	24.224
8	3497.000	3493.468	6.663	3170.123	23.542	4.527	24.224
9	3542.000	3540.269	6.610	3232.406	23.541	4.411	24.224
10	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
10	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
11	3649.000	3650.381	4.485	4124.267	24.089	3.814	24.224
12	3571.000	3571.760	4.666	4607.046	24.090	3.723	24.224
13	3542.000	3542.522	4.850	4773.233	24.090	3.679	24.224
14	3498.000	3498.198	5.352	5094.237	24.091	3.540	24.224
15	3434.000	3433.421	6.075	5578.475	16.982	3.066	17.129
15	3434.000	3433.421	6.075	5578.475	16.982	3.066	17.129
16	3446.000	3445.245	6.646	6057.288	24.147	2.652	24.224
17	3490.000	3489.605	10.128	6537.605	24.155	2.104	24.224
18	3575.000	3575.240	14.806	7021.242	17.115	-1.283	17.129
18	3575.000	3575.240	14.806	7021.242	17.115	-1.283	17.129
19	3550.000	3550.085	12.959	7295.062	24.219	-4.138	24.224
20	3549.000	3548.951	21.197	7499.965	24.222	-4.142	24.224

Ridondanze locali:

	(1) 0.028	(2) 0.029	(3) 0.031	(4) 0.645		
(4) 0.645	(5) 0.052	(6) 0.053	(7) 0.055	(8) 0.055	(9) 0.056	(10) 0.806
(10) 0.806	(11) 0.011	(11) 0.011	(13) 0.011	(14) 0.011	(15) 0.509	
	(15) 0.509	(16) 0.006	(17) 0.006	(18) 0.501		
	(18) 0.501	(19) 0.000	(20) 0.000			

Un discorso conclusivo riprende il giudizio, già formulato, sul rilevamento dei punti, ben lungi dall'essere ottimale. Infatti questo dato di fatto si riflette sulle ridondanze e quelle locali, come pure su sigma zero e gli sqm delle stime ottenute, nonché sul numero di condizione. Tutto ciò significa:

- ❑ quasi impossibilità di identificare eventuali errori grossolani (per l'inaffidabilità dello schema di misura) e scarsa stabilità della soluzione ottenuta (a causa del cattivo condizionamento);
- ❑ bassa precisione delle stime (dovuta alla propagazione di covarianza, oltreché a sigma zero).

D'altra parte, tutte queste validissime considerazioni non inficiano minimamente le ragioni per l'applicazione della metodologia presentata che potrà essere impiegata con esempi migliori, ma che non dovrà essere modificata, da un esempio ad un altro, essendo unica l'intera procedura⁶.

Bibliografia

1. Cressie N.A. (1991): Statistics for Spatial Data. John Wiley and Sons, New York.
2. Davies O.L. (1960): The Design and Analysis of Industrial Experiments. Oliver and Boyd, Londra.
3. Davies O.L. (1961): Statistical Methods in Research and Production. Oliver and Boyd, Londra.
4. Draper N.R., Smith H. (1981): Applied Regression Analysis. Wiley and Sons, New York.
5. Fischer F.E. (1973): Fundamental Statistical Concepts. Canfield Press, San Francisco.
6. Golub G.H., van Loan C.F. (1983): Matrix computation. North Oxford Academic, Oxford.
7. Gentle J.E., Kennedy W.J. (1980): Statistical computing. Dekker, Basilea.
8. George A., Liu J.W.H. (1981): Computer solution of large sparse positive definite systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ).
9. Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. (1986): Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions. Wiley & Sons, New York.
10. Hawkins D.M. (1980): Identification of outliers. Chapman and Hall, Londra.
11. Huber P.J. (1981): Robust Statistics. Wiley & Sons, New York.
12. Kaufman L., Rousseeuw P.J. (1990): Finding Groups in Data. Wiley & Sons, New York.
13. Koch K.R. (1987): Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer, Berlino.
14. Lawson G.L., Handson R.J. (1974): Solving least squares problems. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ).
15. Meissl P. (1982): Least Squares Adjustment a Modern Approach. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 43, Graz.
16. Mikhail E.M., Ackermann F. (1976): Observations and Least Squares. IEP-A Dun-Donnelley Publisher, New York.
17. Moritz H. (1980): Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe.
18. Rousseeuw P.J., Leroy A.M. (1987): Robust Regression and Outlier Detection. Wiley & Sons, New York.
19. Sachs L. (1984): Applied Statistics. A handbook of Techniques. Springer, New York.
20. Varga M.S. (1962): Matrix iterative analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ).

⁶ Un doveroso ringraziamento è indirizzato al Prof. Giovanni Battista Benciolini dell'Università degli Studi di Trento per gli utili consigli forniti sulla miglior via per mettere correttamente in atto l'analisi fattoriale.