

Reti 3d miste gps/total station e deviazione della verticale.

Daniele Sampietro (*), Almudena Garcia Pablos (**)

(*) Politecnico di Milano – Polo Regionale di Como, via Valleggio 11 22100 Como Italy, tel: ++39-031332-7557
fax: ++39-0313327519, email: daniele.sampietro@polimi.it web: <http://geomatica.como.polimi.it/>

(**) Universidad Politécnica de Madrid

Riassunto

L'uso sempre più frequente di Smartstations (ricevitori GPS e total station integrate) pone il problema dell'integrazione di osservazioni classiche e GPS e dei rispettivi sistemi di riferimento. In questo lavoro tale problema viene affrontato attraverso la scrittura rigorosa delle equazioni di osservazione classiche (direzioni azimutali, zenitali e delle distanze) in termini vettoriali rispetto a un sistema di riferimento geocentrico. Le tre equazioni, scritte sia in coordinate cartesiane che ellissoidiche, considerano la corretta direzione della verticale, calcolata in ogni punto come somma della normale rispetto all'ellissoide e della deviazione della verticale. In questo modo l'integrazione di osservazioni GPS, siano esse di basi che di singoli punti, risulta facile e naturale.

Le equazioni d'osservazione, una volta linearizzate, sono compensate ai minimi quadrati, tenendo conto di un modello di covarianza che consideri anche le correlazioni tra le componenti delle basi GPS. Il lavoro, ha permesso in primo luogo, attraverso l'utilizzo del software sviluppato, di valutare gli errori commessi nell'approccio tradizionale alla compensazione di reti, in cui si trascura la variazione della direzione della normale all'ellissoide e la deviazione della verticale. Inoltre è stato sviluppato un algoritmo per la stima di quest'ultima grandezza a partire da osservazioni classiche e GPS. Si sottolinea che, nell'integrazione di osservazioni classiche e GPS, non è necessario né logicamente né praticamente il passaggio a proiezioni di tipo cartografico.

Il risultato è un avanzamento del software didattico NETLAB sviluppato in ambiente MatLab con l'aggiunta, rispetto a quanto già presentato in ASITA 2005 della possibilità di introdurre osservazioni GPS, correzioni dovute alle altezze strumentali e alle diverse condizioni atmosferiche. Le simulazioni e le osservazioni effettuate mostrano come il non considerare correttamente l'effetto della deviazione della verticale porti a errori, proporzionali alla dimensione dei lati della rete stessa, con valore di diversi centimetri già per reti di qualche centinaio di metri.

Abstract

The increasing use of Smartstations (GPS receivers combined with total station) raises the problem of integrate classical and GPS observations and their reference systems. In this work this matter is discussed by writing the classical observation equations (zenital and azimuthal, directions and distances) in a rigorous vectorial form. The three equations, written both in geocentric Cartesian and ellipsoidal coordinates, shall regard the correct vertical direction at each point, calculated as the sum of the normal to the ellipsoid and the vertical deflection. This would allow to integrate GPS observations in a easy and natural way.

Once linearized, the observation equations are compensated by mean of least squares, considering in the covariance model also the correlations between the components of GPS bases. In this work we clarify, through the use of the developed software, the order of magnitude of the errors related to disregard the effect of the deflection of the vertical when adjusting a topographical network.

Furthermore an algorithm to estimate the actual value of the deflection of the vertical using classical and GPS observations, has been developed and tested.

It is important to emphasize that, in the integration of classical and GPS observations, it is not necessary nor logically nor practically switching to any kind of cartographic projections. The result is an advancement of the educational software, developed in MatLab environment, NETLAB with the addition, with respect to the previous version already presented in ASITA 2005, of the possibility to introduce GPS observations, corrections due to instrumental heights and various weather conditions. Simulations and tests suggest that neglecting the effect of the vertical deflection leads to errors, proportional to the size of the sides of the network itself, with value of several centimetres for networks of a few hundred metres.

Le equazioni di osservazione linearizzate, in forma vettoriale.

Il posizionamento di punti a partire da misure topografiche classiche e GPS, può essere effettuato in modo semplice e rigoroso compensando simultaneamente tutte le equazioni di osservazione 3D linearizzate ed espresse in un sistema di riferimento globale geodetico in coordinate ellissoidiche φ, λ, h .

Contrassegnando i valori approssimati delle variabili con il simbolo \sim , il prodotto scalare tra vettori con \cdot quando i vettori sono espressi in forma intrinseca, con il simbolo di trasposto quando si introduce un sistema di riferimento e i vettori sono rappresentati tramite le loro componenti, il differenziale della distanza, dell'angolo zenitale e della direzione azimutale risultano rispettivamente (cfr Figura 1):

$$dD_{ij} = -\tilde{e}'_{ij}\tilde{e}_{\varphi}(\tilde{M}_i + \tilde{h}_i)d\varphi_i - \tilde{e}'_{ij}\tilde{e}_{\lambda}(\tilde{N}_i + \tilde{h}_i)\cos\tilde{\varphi}_i d\lambda_i - \tilde{e}'_{ij}\tilde{v}_i dh_i + \tilde{e}'_{ij}\tilde{e}_{\varphi}(\tilde{M}_j + \tilde{h}_j)d\varphi_j - \tilde{e}'_{ij}\tilde{e}_{\lambda}(\tilde{N}_j + \tilde{h}_j)\cos\tilde{\varphi}_j d\lambda_j - \tilde{e}'_{ij}\tilde{v}_j dh_j \quad [1]$$

$$d\zeta_{ij} = -\tilde{z}'_{ij}\tilde{e}_{\varphi}(\tilde{M}_i + \tilde{h}_i)d\varphi_i - \tilde{z}'_{ij}\tilde{e}_{\lambda}(\tilde{N}_i + \tilde{h}_i)\cos\tilde{\varphi}_i d\lambda_i - \tilde{z}'_{ij}\tilde{v}_i dh_i + \tilde{z}'_{ij}\tilde{e}_{\varphi}(\tilde{M}_j + \tilde{h}_j)d\varphi_j - \tilde{z}'_{ij}\tilde{e}_{\lambda}(\tilde{N}_j + \tilde{h}_j)\cos\tilde{\varphi}_j d\lambda_j - \tilde{z}'_{ij}\tilde{v}_j dh_j \quad [2]$$

$$dA_{ij} = \tilde{\alpha}'_{ij}\tilde{e}_{\varphi}(\tilde{M}_i + \tilde{h}_i)d\varphi_i - \tilde{\alpha}'_{ij}\tilde{e}_{\lambda}(\tilde{N}_i + \tilde{h}_i)\cos\tilde{\varphi}_i d\lambda_i - \tilde{\alpha}'_{ij}\tilde{v}_i dh_i + \tilde{\alpha}'_{ij}\tilde{e}_{\varphi}(\tilde{M}_j + \tilde{h}_j)d\varphi_j - \tilde{\alpha}'_{ij}\tilde{e}_{\lambda}(\tilde{N}_j + \tilde{h}_j)\cos\tilde{\varphi}_j d\lambda_j - \tilde{\alpha}'_{ij}\tilde{v}_j dh_j \quad [3]$$

Dove \underline{r}_{ij} è il vettore tra il punto i e il punto j , $\underline{e}_{ij} = \frac{\underline{r}_{ij}}{|\underline{r}_{ij}|}$, $D_{ij} = |\underline{r}_{ij}|$; $N_i = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_i}}$,

$M_i = \frac{N_i(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi_i}$ con a e e semiasse maggiore ed eccentricità dell'ellissoide di riferimento;

$\tilde{z}_{ij} = -\frac{1}{\sin(\tilde{\zeta})\tilde{D}_{ij}}[\tilde{v}_i - (\tilde{v}'_i \tilde{e}_{ij})\tilde{e}_{ij}]$, \underline{v}_i è la normale all'ellissoide in i ,

$\tilde{\alpha}_{ij} = -\frac{1}{\tilde{D}_{ij} \sin(\tilde{\zeta}_{ij})}[(\tilde{r}_{ji} \cdot \tilde{a}_i)\tilde{b}_i - (\tilde{r}_{ji} \cdot \tilde{b}_i)\tilde{a}_i]$, \underline{a}_i , \underline{b}_i sono, rispettivamente, il versore della direzione

dello zero del cerchio azimutale e il versore a questo ortogonale; tali versori giacciono sul piano orizzontale in i .

Nel sistema geocentrico utilizzato le osservazioni GPS sono facilmente modellizzabili come:

$$\underline{r}_{ij}^{GPS} = \tilde{r}_{ij}^{GPS} + d\underline{r}_{ij} \quad [4]$$

Per quanto riguarda il modello stocastico si ha:

$$\underline{r}_{ij}^{GPS(oss)} = \tilde{r}_{ij}^{GPS} + noise_{ij} \quad [5]$$

in cui la matrice di covarianza del *noise* per ogni osservazione è una matrice 3×3 piena.

La simbologia utilizzata è mostrata nelle Figura 1. Per una trattazione in dettaglio si veda (Sansò, Venuti, 2005 e Brovelli, Sansò, 1989). Le precedenti equazioni sono state integrate nel software sviluppato dal Laboratorio di Geomatica del Polo Regionale di Como NETLAB (Arcara 2005).

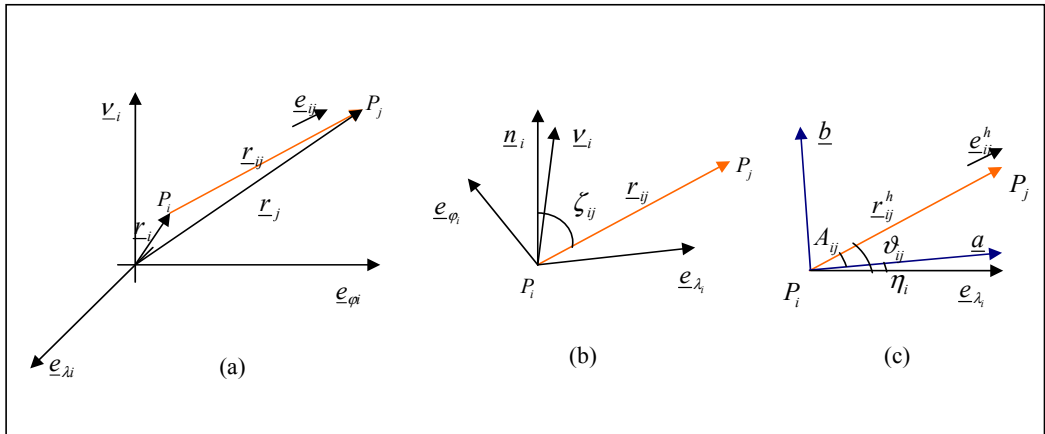


Figura 1 – Simbologia utilizzata nella scrittura delle equazioni d'osservazione linearizzate, per la distanza (a), l'angolo zenitale (b) e la direzione azimutale (c). n_i , v_i in (b) indicano rispettivamente la direzione della verticale e della normale all'ellissoide; (c) è nel piano orizzontale per il punto i ; η_i è l'orientamento incognito della stazione.

Compensazioni e test

Il nuovo software è stato verificato compensando osservazioni geodetiche classiche e GPS sia simulate che reali.

Per le simulazioni, sono state considerate le due reti (costituite ognuna da tre punti): la prima con lati di circa 50m (*rete1* nel seguito), la seconda con lati di circa 1km (denominata *rete2*). Per ogni rete sono state calcolate, considerando diversi valori di deviazione della verticale e di *noise* (cfr. tabelle 1, 2 e 3), tutte le possibili osservazioni di distanza, angoli zenitali, angoli azimutali. Le reti sono state quindi compensate utilizzando il software CALGE (Forlani, 1990), considerato un software standard per la compensazione di reti classiche, e il programma NETLAB. In particolare la compensazione con NETLAB è stata eseguita sia trascurando l'effetto della deviazione della verticale sia utilizzando il valore corretto (considerato noto) di tale grandezza. I risultati del confronto tra le coordinate note e le coordinate ottenute dalla compensazione delle osservazioni simulate sono riportati nelle tabelle 1, 2 e 3 dove, per una maggiore leggibilità, i valori delle differenze delle coordinate geodetiche, sistema di coordinate standard utilizzato da NETLAB, sono state trasformate in metri moltiplicando la latitudine e la longitudine espresse in radianti per un raggio terrestre approssimato $R = 6.3 \cdot 10^6$ m.

Nel caso in cui non venga aggiunto alcun errore casuale alle osservazioni e si consideri correttamente l'effetto di deviazione della verticale (cfr. tabelle 1 e 2), le coordinate compensate, come ci si aspetta, differiscono da quelle esatte solo per errori trascurabili dovuti ad approssimazioni numeriche. Nel caso in cui, invece, si aggiunga un rumore bianco alle osservazioni (in particolare con media nulla e deviazione standard di 1cm per le distanze e di 2" per gli angoli) sempre tenendo conto della deviazione della verticale, si ottengono risultati con una precisione compatibile con tali errori (tabella 3).

Punto	NETLAB ($\zeta=\eta=0$)	NETLAB(ζ,η note)	CALGE
2	φ	-0.0011mm	0.0016mm
	λ	/	/
	h	6mm	0.0mm
3	φ	-0.0011mm	0.00018mm
	λ	0.0015mm	0.0023mm
	h	1mm	0.0mm
			0.3mm

Figura 2 – rete1, $\zeta = \eta = 20''$ e senza noise. Confronto tra coordinate esatte e coordinate compensate.

Punto	NETLAB ($\zeta=\eta=0$)	NETLAB(ζ,η note)	CALGE
2	φ	0.023mm	0.00024mm
	λ	/	/
	h	-124mm	0.0mm
3	φ	0.007mm	-0.014mm
	λ	-0.028mm	-0.0013mm
	h	22mm	0.0mm
			-29mm
			-20mm
			97mm

Figura 3 – rete2, $\zeta = \eta = 20''$ e senza noise. Confronto tra coordinate esatte e coordinate compensate.

Punto	NETLAB ($\zeta=\eta=0$)	NETLAB(ζ,η note)	CALGE
2	φ	15mm	15mm
	λ	/	/
	h	119mm	5mm
3	φ	15mm	15mm
	λ	15mm	15mm
	h	23mm	1mm
			28mm
			118mm
			20mm
			-2.7mm
			22mm

Figura 4 – rete2, $\zeta = \eta = 20''$ e con noise (1cm sulle distanze e 2'' sugli angoli). Confronto tra coordinate esatte e coordinate compensate.

Dai risultati emerge chiaramente come trascurare la deviazione della verticale porti a degli errori (specialmente in h) proporzionale alla lunghezza della base in esame e non trascurabili già per punti distanti tra loro più di 50m. Nello specifico si riscontrano errori di qualche millimetro per la rete con lati di 25m e di circa 10cm per la rete con lati di 1km.

Il software è stato testato anche su due reti reali presentate in figura 5. In questo caso il valore della deviazione della verticale per i punti di interesse è stato calcolato con l'ausilio del modello globale del campo gravitazionale terrestre EGM08 (Pavlis, 2008). Tale modello è in grado di fornire una stima delle due componenti della deviazione della verticale con un'accuratezza di circa 2.8'' (r.m.s.) su tutta la Terra. I risultati delle compensazioni sembrano confermare quanto già visto nelle simulazioni, mostrando differenze tra le coordinate dei punti compensate con Calge e i risultati ottenuti con NETLAB di pochi millimetri (2mm r.m.s.) per la rete piccola e di qualche centimetro (7cm r.m.s.) per la rete più grande.

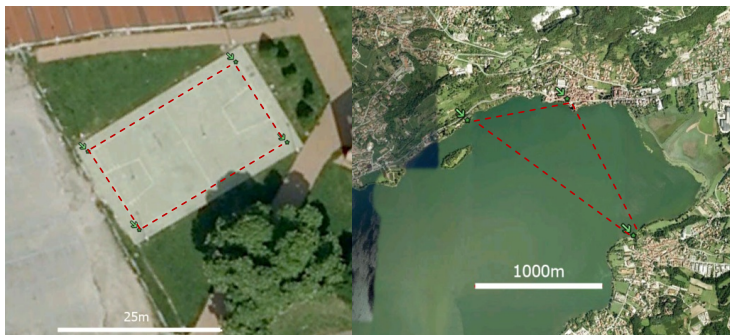


Figura 5 – le due reti reali utilizzate per testare il software e stimare la deviazione della verticale.

Stima della deviazione della verticale

Nei problemi di compensazione affrontati finora abbiamo sempre supposto di conoscere, ad esempio da un modello di geoidi locale o globale, la deviazione della verticale. In realtà questa grandezza può essere stimata a partire da osservazioni classiche e GPS. Consideriamo il caso più semplice in cui ipotizziamo note le coordinate ellissoidiche di tre punti P1, P2 e P3 (ad esempio stimate con l'utilizzo di un ricevitore GPS), e le misure di distanza, angolo zenitale e direzione azimutale tra i tre punti. Definiamo ora un sistema di riferimento cartesiano geodetico locale centrato sul punto P1, quest'operazione può essere facilmente eseguita esprimendo le coordinate di tutti i punti in un sistema cartesiano geocentrico e applicando successivamente la rototraslazione definita da:

$$X_{ii} = R'(X_i - X_1) \quad [6]$$

Dove $R = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$, X_{ii} sono le coordinate nel sistema di riferimento

locale del punto P_i , X_i sono le coordinate nel sistema cartesiano geocentrico del punto P_i e X_1 sono le coordinate cartesiane geocentriche del punto P1, origine del sistema di riferimento locale.

Con questa operazione abbiamo in pratica espresso le coordinate dei tre punti in un sistema di riferimento cartesiano (*est, nord, up*) in cui l'asse *up* risulta essere parallelo alla normale all'ellissoide nel punto P1. Possiamo ora compensare le misure topografiche classiche in un nuovo sistema di riferimento sempre centrato sul punto P1 e con l'asse *z* rivolto secondo la verticale in P1. Il risultato di quest'operazione saranno le coordinate dei punti P2 e P3 espresse nel sistema di riferimento geodetico locale appena definito. Le coordinate dei punti P2 e P3 così ottenute saranno in generale differenti da quelle ottenute mediante le misure GPS in particolare si avranno grosse differenze nelle componenti *up*. È ora possibile andare a stimare utilizzando i minimi quadrati i due parametri della matrice di rotazione necessaria a far coincidere i valori delle coordinate *up* dei punti P2 e P3 stimate con le osservazioni GPS e quelle stimate a partire dalle misure classiche. Questi parametri che rappresentano anche le rotazioni intorno all'asse *est* e all'asse *nord* necessarie per far coincidere l'asse *up* del sistema di riferimento cartesiano locale con la direzione della verticale implicitamente definita nella compensazione delle misure classiche sono proprio le componenti del vettore deviazione della verticale ricercate. In pratica il principio utilizzato per il calcolo della deviazione della verticale è quello di stimare attraverso i minimi quadrati le componenti della rotazione necessaria a far coincidere i piani perpendicolari a v e a $v+\delta$ in un punto della rete e poi di considerare tale grandezza costante.

Questo metodo è stato testato sulle due reti reali di figura 5.

I parametri di rotazione stimati per la prima rete risultano essere $\zeta=60.5''$ e $\eta=3.5''$. Questi valori poco verosimili sono stati comunque confrontati con i valori reali ottenuti a partire dal modello globale EGM08. La differenza tra il valore calcolato da EGM08 e quello stimato è di $37.9''$ per ζ e $3.3''$ per η ed è dovuta sostanzialmente al fatto che i punti considerati nella rete sono molto vicini tra loro (le basi hanno valori inferiori ai 25m.) e che le osservazioni GPS per quanto precise contengono errori dell'ordine di qualche millimetro. È facile intuire come un valore di deviazione della verticale di $20''$ su distanze di circa 20m comporti differenze nella stima della coordinata *up* di circa 2mm (differenza che può essere facilmente mascherata da errori presenti nelle misure). Per quanto riguarda la seconda rete i valori di deviazione della verticale ottenuti sono: $\zeta=20.1''\pm 0.5''$ e $\eta=2.4''\pm 0.6''$ con differenze rispetto a quelli forniti da EGM08 di $1.7''$ per ζ e $2.2''$ per η (valori che ben si accordano con gli errori di stima).

Conclusioni e sviluppi futuri

I test e le compensazioni effettuate mostrano chiaramente come il non considerare in modo appropriato la corretta direzione dell'asse verticale nella compensazione di una rete classica porti a

errori non trascurabili, specialmente se le osservazioni di distanza, azimuth e zenith vengono compensate congiuntamente a osservazioni GPS.

Per questo l'equazioni d'osservazione sono state riscritte e linearizzate in coordinate geocentriche considerando la direzione della verticale come la somma della normale all'ellissoide e della deviazione della verticale. Quest'ultima grandezza può essere derivata con sufficiente accuratezza utilizzando ad esempio il modello globale EGM08 oppure può essere stimata tramite un'apposita procedura basata su osservazioni GPS e di topografia classica. Il presente lavoro dimostra come sia possibile compensare congiuntamente, in modo corretto, osservazioni classiche e GPS, stimando il valore della deviazione della verticale e senza ricorrere a nessuna proiezione cartografica.

Riferimenti bibliografici

- Sansò F., Venuti G. (2005), "NETLAB: un laboratorio numerico per reti 3D classiche e GPS", *atti 9a conferenza nazionale Asita, 15-18 novembre 2005, Catania, Italy*, 1825-1830
- Brovelli M., Sansò F. (1989), "Equazioni d'osservazione della topografia in coordinate cartesiane locali: scrittura, linearizzazione e analisi dei relativi ambiti di validità", *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 5 (n°3): 255-274.
- Arcara M. (2005), *Posizionamento 3D*, Tesi di laurea, Politecnico di Milano, Como
- Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K. (2008), "An Earth Gravitational Model to Degree 2160:EGM2008", *EGU General Assembly 2008, Vienna, Austria, April 13-18, 2008*
- Lemoine F. G., Kenyon S. C., Factor J. K., Trimmer R. G., Pavlis N. K., Chinn D. S., Cox C. M., Klosko S. M., Luthcke S. B., Torrence M. H., Wang Y. M., Williamson R. G., Pavlis E. C., Rapp R. H., Olson T. R. (1998). *The Development of the Joint NASA GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM96*, NASA TP/-1998-206861 , NASA Goddard Space Flight Center.